Kombinatorische Optimierung –

Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht

vorgelegt von
Stud. Ass. Brigitte Lutz-Westphal, Berlin

Von der Fakultät II –
Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktorin der Naturwissenschaften
– Dr. rer. nat. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender:	Prof. Dr. John M. Sullivan, Technische Universität Berlin
Berichter:	Prof. Dr. Martin Grötschel, Technische Universität Berlin
	Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp, Päd. Hochschule Schwäbisch Gmünd
	Prof. Dr. Jürg Kramer, Humboldt-Universität zu Berlin

Tag der wissenschaftlichen Aussprache:
19 Juli 2006

Berlin 2006
D 83

Ehrlich gesagt,

wir wissen von keinem Stoff,
den wir den Kindern übermitteln sollen,
ob er der rechte sei.

Wir können sie aber etwas Kostbares lehren:
wie man den Stoff meistert.

Hans Freudenthal, Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1, Stuttgart 1973, S. 61

Vorwort

Diese Dissertation ist im Rahmen des von der Volkswagenstiftung geförderten und von Prof. Dr. Martin Grötschel geleiteten Projekts „Diskrete Mathematik für die Schule" (ZIB und TU Berlin) entstanden. Das Ziel des Projektes war, Themen der kombinatorischen Optimierung in die Schule zu bringen.

Um dieses Ziel zu erreichen, wurden zunächst die Inhalte gesichtet und eine Auswahl getroffen. Die ersten Ideen zur Umsetzung im Unterricht wurden im Jahr 2002 bei ersten Unterrichtsversuchen verwirklicht. In den folgenden drei Jahren wurden die Unterrichtskonzepte weiterentwickelt und weiter erprobt. Parallel dazu fanden zahlreiche Vorträge und Lehrerfortbildungen zum Thema statt.

Das Projekt „Diskrete Mathematik für die Schule" wurde im Jahr 2004 als assoziiertes Projekt in das Berliner DFG-Forschungszentrum Matheon Mathematik für Schlüsseltechnologien aufgenommen und bekam dort ein Schwesterprojekt „Visualisierung von Algorithmen" unter Leitung von Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp, in dem dynamische Unterrichtssoftware zur kombinatorischen Optimierung entwickelt wurde und wird.

Das Interesse sowohl an den Themen, die so besonders gut zugänglich sind und neue Perspektiven für den Mathematikunterricht eröffnen, als auch an der methodischen Herangehensweise war sowohl in wissenschaftlichen Fachkreisen als auch auf Seiten der Lehrerschaft von Beginn an groß. So konnte man beobachten, dass die Popularität von diskreter Mathematik in Schule und Didaktik – nicht nur durch unsere Projekte – in den letzten Jahren stark gestiegen ist.

Ausdruck dessen ist, dass in drei neue Lehrpläne in Deutschland Wahlmodule für diskrete Mathematik bzw. kombinatorische Optimierung aufgenommen wurden: Im neuen Berliner Rahmenplan für die Sekundarstufe I (Inkrafttreten: Sommer 2006) sind auf Veranlassung von Ulrich Kortenkamp und der Autorin Wahlmodule zur kombinatorischen Optimierung in den Doppeljahrgangsstufen 7/8 und 9/10 zu finden. In den seit Sommer 2005 gültigen Lehrplänen für Hamburg sowie im modifizierten Lehrplan für die Berliner Netzwerkschulen für den Profilkurs 11 gibt es ebenfalls Wahlbereiche zu diesen Themen.

In Zusammenarbeit mit Prof. Dr. Hußmann (Universität Dortmund) entstand ein Lehrbuch (nicht nur) für Lehrerinnen und Lehrer „Kombinatorische Optimierung erleben" [38], zu dem auch Prof. Dr. Andreas Brieden, Prof. Dr. Peter Gritzmann, Prof. Dr. Martin Grötschel und Prof. Dr. Timo Leuders Beiträge geschrieben haben.

Am Ende der Projektlaufzeit schließlich wurde die vorliegende Dissertation fertiggestellt, die die wissenschaftlichen Erkenntnisse zusammenfasst, einiges Material der Unterrichtsversuche dokumentiert und einen Theorierahmen schafft. Damit ist die Forschungsarbeit zur kombinatorischen Optimierung als Schulstoff (eine weitere Arbeit zum Thema ist z. B. Schuster [74]) jedoch nicht abgeschlossen. U. a. an der TU Berlin und der Universität Dortmund sind weiterführende Studien geplant.

Danke!

Es gibt sehr viele Menschen, die das Werden dieser Arbeit unterstützt und begleitet haben und denen ich dafür danken möchte.

An erster Stelle ist Prof. Dr. Martin Grötschel mit seiner Idee für das Projekt „Diskrete Mathematik für die Schule“ zu erwähnen. Von ihm konnte ich lernen, zielstrebig und konsequent ein großes Arbeitspensum zu bewältigen und dadurch Visionen in die Tat umzusetzen. Seine Begeisterung für die Thematik war ansteckend und seine didaktischen Ideen sehr inspirierend. Besonders hervorzuheben ist seine Unterstützung für eine Doktorandin mit einem (zunächst noch sehr) kleinen Kind.

Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp und die Mitarbeiter des Matheon-Projekts G6, Anne Geschke und Dirk Materlik haben wichtige Denkanregungen beigesteuert und viel zur Verbreitung der Themen beigetragen. Dr. Marc Pfetsch hat vor allem die Entstehung der Buchkapitel kontinuierlich begleitet und mit seiner fundierten Kritik vorangebracht. Prof. Dr. Hans-Joachim Vollrath hat mich ermutigt, den didaktik-historischen Wurzeln zur kombinatorischen Optimierung nachzugehen und mich an dem Konzept des authentischen Mathematikunterrichts zu orientieren. Viele weitere wichtige Anregungen verdanke ich Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker, Prof. Dr. Stephan Hußmann und Prof. Dr. Timo Leuders.

Herrn Prof. Dr. Jürg Kramer danke ich für die Bereitschaft, Zweitgutachter für diese Arbeit zu sein.

Diesen allen sowie vielen hier nicht einzeln erwähnten Kolleginnen und Kollegen einen herzlichen Dank!

Die Realisierung des Projekts „Diskrete Mathematik für die Schule“ wurde durch die freundliche Förderung der Volkswagenstiftung ermöglicht. Das DFG-Forschungszentrum Matheon finanzierte zusätzlich einen Teil der Forschungsarbeiten. Die Infrastruktur wurde vom Zuse-Institut Berlin und der Technischen Universität Berlin zur Verfügung gestellt. Vielen Dank! Ein besonderer Dank geht an Prof. Dr. Günter M. Ziegler und Prof. Dr. John M. Sullivan für die Möglichkeit, als Gast in den jeweiligen Arbeitsgruppen einen Arbeitsplatz zu nutzen. Christoph Eyrich gestaltete das Layout der Buchkapitel und half bei allen technischen Fragen, herzlichen Dank!

Weiterer Dank geht an die Schülerinnen und Schüler und die Lehrerinnen und Lehrer der folgenden Schulen, durch die es möglich wurde, erste Erfahrungen mit kombinatorischer Optimierung im Unterricht zu sammeln: Herder-Oberschule, Romain-Rolland-Gymnasium und Wieland-Herzfelde-Oberschule Berlin, Sommerschule Blossin 2004, Geschwister-Scholl-Schule und Wildermuth-Gymnasium Tübingen.

Ganz besonders danke ich meiner Familie: Dr. Frank Lutz für alle erdenkliche Unterstützung und Ermutigung und die vielen Fachdiskussionen, Sebastian für seine Geduld mit seiner intensiv arbeitenden Mutter, meinen Eltern, Isolde Westphal-Köpf und Prof. Dr. Frank Westphal, für stetigen Rückhalt und Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

„Wie macht man aus dem Fachgebiet der kombinatorischen Optimierung Unterricht?“. Dies war die Frage, die die Entstehung dieser Arbeit motivierte. Ein für den Schulunterricht geeignetes, aber noch wenig dafür aufbereitetes Gebiet der modernen Mathematik stellt eine Seltenheit und einen Glücksfall dar. Kann man doch an ein noch „unbelastetes“ Thema, das praktisch keine Unterrichtstradition hat, bei der Entwicklung von Unterrichtskonzepten und -methoden ganz unvoreingenommen herangehen, und dabei versuchen, Visionen von Unterricht in die Tat umzusetzen.

Die Theorie des authentischen Mathematikunterrichts, die in Kapitel 1 dargelegt wird, bildet den Theorie- und Begründungsrahmen. Es wird dort ein Idealbild von Mathematikunterricht gezeichnet, das sicherlich nicht immer so verwirklicht werden kann, aber Auswahl der Inhalte, Didaktik und Methodik stark beeinflusst. Ein wichtiger Punkt ist dabei, Mathematik als lebendige Wissenschaft zu vermitteln.

Kapitel 2 dokumentiert, inwiefern Graphentheorie und kombinatorische Optimierung in der Vergangenheit in der Bundesrepublik Deutschland als Schulstoff diskutiert worden sind. Es gab einige Ansätze, solche Themen in den Unterricht zu bringen, doch haben diese sich nicht durchsetzen können. Die Gründe hierfür können aus den Quellen herausgelesen werden und sprechen nicht gegen einen neuerlichen Versuch. Am Ende des Kapitels wird kurz die aktuelle Entwicklung dargestellt, die eine verstärkte Aktivität in dieser Richtung verzeichnen kann.

„Besser als Mathe!“ So lautet die Fragebogenantwort einer Schülerin oder eines Schülers aus der 8. Klasse. Die Frage lautete: „Wie hat dir das Thema gefallen?“ und bezog sich auf eine Unterrichtseinheit über minimale aufspannende Bäume. Dieser Schülerkommentar wirft zwei Fragen auf: Was ist an der kombinatorischen Optimierung so anders als bei der herkömmlichen Schulmathematik? Und: Woran liegt es, dass kombinatorische Optimierung sich so besonders gut unterrichten und erarbeiten lässt?

Um diesen Fragen nachzugehen, erfolgen in den Kapiteln 3 und 5 zwei unterschiedlich ausgerichtete Analysen des Stoffes. Im dritten Kapitel (mehr zu Kapitel 5 s. u.) wird untersucht, welche Arbeitsweisen typisch für die diskrete Mathematik sind. Der Blickwinkel für dieses Kapitel ist eher ungewöhnlich, es ist die Analyse mathematischer Methoden und Tätigkeiten aus didaktischer Sicht, jedoch ohne konkret über Unterricht zu sprechen. Dabei soll herausgearbeitet werden, welche Tätigkeiten ein Unterricht über die Thematik anregen soll, bzw. welche Tätigkeiten und Methoden die Beschäftigung mit dem Stoff mit sich bringt.

Wenn aus einem bislang für die Schule kaum aufbereiteten Fachgebiet Unterricht gemacht werden soll, ist eine Begründung der Auswahl der Themen und eine Festlegung der Fachbegriffe notwendig. Dies geschieht in Kapitel 4. Auch hier spielen didaktische Gesichtspunkte mit hinein, insbesondere bei der Formulierung von Definitionen. Es gleicht einem Drahtseilakt, unkomplizierte und aus dem handelnden

Umgang entstehende Definitionen zu formulieren, die nicht zu viele verwirrende Sonderfälle beinhalten, und gleichzeitig mathematisch exakt zu bleiben.

Das fünfte Kapitel erörtert das didaktische Potenzial des Stoffes, indem einzelne Aspekte des Themengebietes analysiert werden. Die Erkenntnisse aus der „metamathematischen" Analyse von Kapitel 3 werden hier genutzt, aber auch weitere Eigenschaften des Stoffes und erste Erfahrungen aus dem Unterricht. Hier zeigen sich die besonderen Stärken der Themen für den Unterricht, die u. a. Anlass für die oben zitierte Schüleräußerung gewesen sein können.

Aufgrund der Analyse des didaktischen Potenzials und der Unterrichtserfahrungen mit den Themen wurden Unterrichtsmethoden entwickelt, die mit den besonderen Stärken des Stoffes arbeiten bzw. typische Schwierigkeiten aufgreifen und produktiv nutzen. Sie werden in Kapitel 6 dargestellt und erläutert.

Kapitel 7 zeigt konkret, wie Unterrichtsmaterialien zur kombinatorischen Optimierung aussehen können, und dokumentiert Schülerarbeiten aus den Unterrichtsversuchen. Diese Dokumente zeigen deutlich, dass die in dieser Arbeit aufgestellten Thesen sich zumindest in dem durchgeführten Unterricht bestätigen. Sie sind zum Teil sehr aussagekräftig und zeigen zudem, auf welchen Niveau sich Unterricht über die gewählten Themenbereich bewegen kann.

Das letzte Kapitel der Arbeit beinhaltet den Vorabdruck dreier Buchkapitel[1] aus dem u. a. in dem Berliner Projekt „Diskrete Mathematik für die Schule" entstandenen Lehrbuch für Lehrer/innen „Kombinatorische Optimierung erleben" [38], die zeigen, wie ein Lehrbuchtext gestaltet sein kann, der zu einem authentischen Unterricht anregen möchte. Der Erarbeitungsweg in den Buchkapiteln zeigt modellhaft einen möglichen Unterrichtsgang. Es sind dabei mögliche und typische Erarbeitungswege von Schülerinnen und Schülern beschrieben. Einige Hinweise zur Unterrichtsmethodik sind in den Text integriert, so dass ein recht umfassendes Bild von Unterricht über kombinatorische Optimierung entsteht.

Bislang beziehen sich die Erfahrungen mit kombinatorischer Optimierung im Unterricht auf den Gymnasialbereich. Im neuen Berliner Rahmenplan werden die Themen auch für die anderen Schulformen der Sekundarstufe I vorgeschlagen. Eine handlungsorientierte Herangehensweise ist mit diesen Themen für alle Niveaus möglich. Da aber aus nicht-gymnasialen Bereichen (noch) keine Erfahrungen vorliegen, bezieht sich diese Arbeit vorwiegend auf den gymnasialen Bereich.

In den nächsten Jahren wird es aufschlussreich sein zu erheben, ob und in welchem Umfang kombinatorische Optimierung tatsächlich im Unterrichtsalltag Einzug findet und inwieweit sich die Thesen dieser Arbeit weiterhin bestätigen.

[1] Das Buchkapitel zum Travelling-Salesman-Problem [30] für das Buch „Kombinatorische Optimierung erleben" wurde dankenswerterweise von Prof. Dr. Martin Grötschel geschrieben und ist daher wie die weiteren Kapitel des Buches nicht Teil dieser Dissertation.

1 Authentischer Mathematikunterricht – Mathematik erleben

Auch wenn Hans Freudenthal schon 1973 schreibt: „Zweck und Ziel des Mathematikunterrichts sind schon so lange, so häufig, von so vielen, unter so vielen Gesichtspunkten diskutiert worden, daß schließlich nichts Vernünftiges mehr über dieses Thema zu sagen sein sollte.“ ([22], S. 66), so werden in diesem ersten Kapitel dennoch einige Überlegungen zu den Zielen des Mathematikunterrichts dargelegt. Die Diskussion über die Ziele des Mathematikunterrichts wurde in den letzten Jahren durch die Einführung von Bildungsstandards und der damit verbundenen Kompetenzorientierung des Unterrichts neu belebt und erweitert. Man könnte sogar von einer paradigmatischen Wende für den Mathematikunterricht sprechen.

Der Beitrag des Faches Mathematik zur Bildung wird in den deutschen, 2003 in Kraft getretenen „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“ durch folgende Liste von Grunderfahrungen, die der Unterricht ermöglichen soll, charakterisiert.

> „Mathematikunterricht trägt zur Bildung der Schülerinnen und Schüler bei, indem er ihnen insbesondere folgende Grunderfahrungen ermöglicht, die miteinander in engem Zusammenhang stehen:
>
> - technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen,
> - Mathematik mit ihrer Sprache, ihren Symbolen, Bildern und Formeln in der Bedeutung für die Beschreibung und Bearbeitung von Aufgaben und Problemen inner- und außerhalb der Mathematik kennen und begreifen,
> - in der Bearbeitung von Fragen und Problemen mit mathematischen Mitteln allgemeine Problemlösefähigkeit erwerben.“

Weiter wird die „aktive Auseinandersetzung“ mit der Materie gefordert, „selbstständiges Lernen“, das „individuelle Lernwege und Lernergebnisse“ berücksichtigt, Orientierung an den Lernprozessen und Lernergebnissen der Schülerinnen und Schüler und nicht allein an der Fachsystematik. „Schülerinnen und Schüler sollen auf diese Weise Mathematik als anregendes, nutzbringendes und kreatives Betätigungsfeld erleben […]“ (alles [75], S. 9).

Die veränderte Perspektive auf die Unterrichtsziele hat nicht nur Auswirkungen auf die Unterrichsmethodik, sondern sie soll idealerweise auch Raum für neue Themen im Mathematikunterricht bieten, wie z. B. die kombinatorische Optimierung. Die verstärkte Konzentration auf die Förderung von bestimmten Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler hat die inhaltliche Diskussion allerdings etwas in den Hintergrund treten lassen. Die in den vergangenen Jahren entwickelten standardorientierten Lehrpläne der einzelnen Bundesländer beschäftigen sich zum Großteil auf der Basis des traditionellen Inhaltskanons mit der Umsetzung der Kompetenzförderung. Moderne Inhalte oder neue Aspekte traditioneller Inhalte sind rar.

Das mag daran liegen, dass die Standards zwar dadurch, dass sie die Inhalte des Unterrichts nicht detailliert festlegen, grundsätzlich Raum lassen für neue und innovative Inhalte, aber wenig Hinweise darauf geben, welche Anforderungen generell an Inhalte des Unterrichts zu stellen sind. Es werden in den Standards lediglich einige Leitideen formuliert, die sich quer zu den mathematischen Sachgebieten durch die Curricula ziehen sollen. Die inhaltliche Ausgestaltung der Curricula ist Aufgabe der einzelnen Bundesländer.

Vor diesem Hintergrund soll hier ein Beitrag zur Diskussion über inhaltliche Unterrichtsziele geleistet werden. Insbesondere wird dabei eine Betonung auf den Bezug zur mathematischen Forschung gelegt, der seit dem Zeitalter der „Strukturmathematik“ allzusehr in den Hintergrund getreten ist. Die in diesem Kapitel ausgearbeiteten Überlegungen umfassen nicht das ganze Spektrum inhaltlicher Zielrichtungen, sondern widmen sich einem Aspekt, der für den Unterricht über kombinatorische Optimierung eine zentrale Rolle spielt: der Authentizität des Mathematikunterrichts. Die Forderung nach Authentizität liefert einen Begründungsrahmen für die Einführung von kombinatorischer Optimierung in Lehrpläne und Unterricht. Darüberhinaus zieht sie eine Reihe von Konsequenzen nach sich, die sich in der Auswahl der Inhalte und – das eine ist kaum von dem anderen zu trennen – der Unterrichtsmethoden niederschlagen.

Was also ist gemeint, wenn von einem authentischen Mathematikunterricht die Rede ist? Worauf bezieht sich die Forderung nach Authentizität?

Authentischer Mathematikunterricht umfasst:

1. **eine authentische** (= persönlich ansprechende und herausfordernde, echte mathematische Erfahrungen ermöglichende) **Begegnung und Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit dem Stoff**,
2. **Authentizität** (= fachliche Angemessenheit) **der im Laufe der unterrichtlichen Erarbeitung verwendeten mathematischen Methoden** und
3. **authentische** (= ein zeitgemäßes Bild von Mathematik vermittelnde) **Inhalte in realen oder realistischen Kontexten**.

Diese drei Punkte haben insbesondere Einfluss auf zwei Dimensionen von Unterricht: die Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler und die Inhalte.

Ziele eines authentischen Unterrichts sind:

- einen Bezug zwischen der persönlichen Erlebniswelt und mathematischem Denken und Handeln herzustellen,
- mathematische Denk- und Arbeitsweisen durch eigenes Tun zu entdecken und kennenzulernen,
- das individuelle mathematische Handlungsrepertoire zu erweitern,
- Mathematik als lebendige Wissenschaft in ihren Anwendungen zu erleben.
- einen Einblick in die mathematische Forschung zu bekommen.

Diese Thesen entwickeln die von Alexander Israel Wittenberg (in [91], 1963) und Hans-Joachim Vollrath (in [83], 2001) ausgearbeiteten Theorien weiter[2]. Vollrath definiert ([83], S. 26): „Ein Unterricht, der zuverlässige Erfahrungen mit Mathematik vermittelt, soll *authentisch* genannt werden.“ Solch ein Unterricht habe drei grundlegende Fragen zu beantworten ([83], S.26): Was ist Mathematik? Wie entsteht Mathematik? Was kann man mit Mathematik anfangen?

Einen ähnlichen Ansatz gibt es in den Niederlanden. Dort wird aufbauend auf den Theorien Hans Freudenthals, der Mathematik als eine menschliche Tätigkeit hervorhob (im Gegensatz zur Mathematik als fertiges, zu lernendes Produkt), die „Realistic Mathematics Education“ (RME) seit den 70er Jahren fortentwickelt (vgl. Van den Heuvel-Panhuizen [80], [81] und Westermann [86]). Dabei steht „realistic“ nicht unbedingt für realitätsgetreue Anwendungen, sondern bezieht sich, ebenso wie in der Theorie des authentischen Mathematikunterrichts, vor allem auf die Art der Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit den Inhalten. Da die Theorie der RME an verschiedenen Stellen in die hier entwickelte Theorie des authentischen Mathematikunterrichts einfließt, wird nicht jedes Mal erneut darauf verwiesen.

Bereits in den frühen 60er Jahren machte Alexander Israel Wittenberg sich für einen (damals noch nicht so benannten) authentischen Mathematikunterricht stark ([91], S. 50/51):

> „Im Unterricht muss sich für den Schüler eine *gültige Begegnung* mit der Mathematik, mit deren Tragweite, mit deren Beziehungsreichtum, vollziehen; es muß ihm am Elementaren ein echtes Erlebnis dieser Wissenschaft erschlossen werden. Der Unterricht muß dem gerecht werden, *was Mathematik wirklich ist.* Diese Zielrichtung muß die Auseinandersetzung mit der konkreten Gestaltung des Unterrichts leiten.“

[2] Bei einigen anderen Autoren findet man den Begriff „authentisch“ ebenfalls: z. B. in: Büchter/Leuders [15], Habdank-Eichelsbacher/H. N. Jahnke [31], Hußmann/Leuders [37], Th. Jahnke [40].

Seine Forderungen beziehen sich also nicht nur auf eine bestimmte Methodik oder bestimmte Inhalte, sondern auf beides zugleich, was diesen Ansatz gegenüber vielen anderen auszeichnet, die entweder vorwiegend die Methodik oder vorwiegend die Inhalte bzw. die Sequenzierung der Inhalte im Blick haben.

Auch Freudenthal plädiert für eine ähnliche Ausrichtung des Unterrichts, wenn er schreibt ([22], S. 126): „[...] wie die Struktur im Großen der zu unterrichtenden Mathematik zu verstehen wäre: sie ist nicht starres Gerüst, sondern sie entsteht und vergeht mit der sich im Lehrprozess entwickelnden Mathematik. [...] Das im Großen Strukturierende soll [...] erlebte Wirklichkeit sein; nur so konnten wir beziehungsvolle Mathematik unterrichten; nur so konnten wir sicher sein, daß der Schüler sich die Mathematik, die er lernt, einverleibt; nur so konnte die Anwendbarkeit der gelernten Mathematik gewährleistet werden.“

Wenden wir uns nun einzelnen Aspekten authentischen Unterrichts zu. Wir gehen dabei von den Inhalten und charakteristischen mathematischen Methoden aus und zeigen dann, welche Methoden authentische Begegnungen mit authentischer Mathematik fördern können.

1.1 Bezug zu Forschung und Anwendung – authentische Inhalte in realen oder realistischen Kontexten

Authentischer Mathematikunterricht bedeutet, authentische Erfahrungen mit mathematischen Fragen, Inhalten und Methoden zu ermöglichen, und zwar anhand von „authentischer Mathematik“. Damit ist gemeint, für den Unterricht Inhalte auszuwählen, die widerspiegeln, was heute die Wissenschaft Mathematik ausmacht. Aktuelle Forschungsrichtungen und Anwendungen sind ebenso einzubeziehen wie klassische Inhalte, die dem mathematischen Basiswissen zuzuordnen sind.

Authentizität kann also bedeuten, klassische (Schul-)Themen wie etwa ebene Dreiecksgeometrie im Unterricht mit realen oder realistischen Anwendungen zu verbinden. Ein Beispiel: Der Satz des Pythagoras etwa wird auch heute noch angewandt, um für eine vorgegebene Baugrube herauszufinden, welche Größe die dort zum Einsatz kommenden Kräne haben müssen. Dies ist eine Aufgabe aus dem Alltag von Bauingenieuren, die ohne Weiteres bereits in der Mittelstufe bearbeitet werden kann.

Zur Vermittlung eines authentischen Mathematikbildes gehört auch, dass die Geschichte der Mathematik anhand historischer Quellen (vgl. [31]) Raum bekommt. Damit bekommt die Mathematik ein menschliches Gesicht. In der Schulmathematik geht es oft angesichts des gehäuften Trainings von Rechenfertigkeiten allzu leicht unter, dass es Menschen sind, die die Mathematik erfunden und vorangebracht haben und heute erfinden und voranbringen.

Insbesondere ist es ein weit verbreiteter Irrtum, dass es in der Mathematik heute nichts mehr zu forschen gibt. Die Geschichte der Mathematik endet nicht mit ägyptischen Feldvermessern und Pythagoras, sondern hat eine Reihe von weiteren interessanten Persönlichkeiten zu bieten und viele spannende Geschichten zu erzählen. Kein Musikunterricht kommt ohne sogenannte „Komponistenportraits“ aus. In der Musik ist es gute Tradition, sich auch mit den Personen, die die Werke verfasst haben, zu beschäftigen. In der Mathematik bzw. dem Mathematikunterricht wäre es wünschenswert, eine solche Tradition aufkommen zu lassen. (Dass es sie (noch) nicht gibt, hängt vielleicht mit der tendenziell zurückhaltenden Persönlichkeit von Mathematikerinnen und Mathematikern zusammen?)

Was wäre ein Biologieunterricht (am Gymnasium) ohne Molekulargenetik? Andere Schulfächer tun sich weniger schwer, einigermaßen den Anschluss an ihre Wissenschaft zu halten. Die Mathematik mit ihren unumstößlichen und auch weiterhin fundamental wichtigen elementaren Methoden und Resultaten tut sich da schwerer. Für einen authentischen Mathematikunterricht ist eine stärkere Wissenschaftsorientierung unumgänglich.

Es ist damit nicht gemeint, dass die Sequenzierung des Stoffes sich nach den Gepflogenheiten der Wissenschaft richten solle. Wolfgang Klafki hat sich mit dieser Problematik eingehend auseinandergesetzt. Im Rahmen einer Diskussion des exemplarischen Ansatzes der Didaktik aus den 50er bis 70er Jahren wird auch das Problem der damals oft fehlgedeuteten Forderung nach „Wissenschaftsorientierung“ der Curricula angesprochen. Er beschreibt das in seinen Augen didaktisch fragwürdige Verständnis der „Wissenschaftsorientierung“ der Lehrpläne ([44], S. 148/149): „Der Aufbau der Curricula und die Gestaltung des Unterrichts müßten systematisch auf jene allgemeinsten Theorieelemente und Grundbegriffe und/oder auf jene Methoden hin orientiert werden, die den fortgeschrittensten Stand der jeweiligen Bezugswissenschaften kennzeichneten, also z. B. die wissenschaftliche Physik als Bezugsdisziplin des Physikunterrichts usw.“ Er gibt als Negativbeispiel für die Orientierung an den „structures of the discipline“ Curriculumsentwürfe für den Sachunterricht in der ersten Klasse an.

Weiter schreibt er ([44], S. 168): „Schulfächer sind *keine* Abbilder bestimmter Universitätswissenschaften [...] Lehrer bzw. Fachlehrer müssen sich *auch* aus diesem Grunde als Vertreter einer eigenständigen, nämlich *didaktisch* akzentuierten Aufgabe verstehen: sie sollen nicht Einzelwissenschaften vereinfacht in die Schule übersetzen, sondern Wissenschaft unter didaktischen Fragestellungen nach ihrem Lösungspotential für ‚Lebensprobleme‘ und nach ihren Grenzen befragen.“

Klafki formuliert als eine Aufgabe recht verstandenen wissenschaftsorientierten Unterrichts ([44], S. 169): „Anhand ausgewählter Probleme, die entweder aus dem Erfahrungs- und Interessenkreis der Schüler stammen oder deren Bedeutsamkeit ihnen verständlich gemacht, für die ihr Interesse also geweckt werden kann, sollten junge Menschen von den ersten Schuljahren an in gründlichen, nicht durch Stofffülle belasteten Lernprozessen elementare Grundformen der Auseinandersetzung mit Fragen und Problemen erlernen [...]“

Klafki vertritt in seinen Überlegungen die These, dass Schulunterricht zur ganzheitlichen Bildung beitragen solle und zwar in jedem Fach. Authentischer Mathematikunterricht soll eine Möglichkeit aufzeigen, sich diesem Ideal zu nähern.

Orientierung an der Fachwissenschaft Mathematik soll also bedeuten, dass Ausschnitte aus der Mathematik gewählt werden, die zeigen, dass Mathematik eine lebendige Wissenschaft ist, die Anwendungen im täglichen Leben hat, die Antworten auf offene Fragen sucht, die von Menschen gemacht und nachvollzogen werden kann. Innerhalb dieser Ausschnitte sollten Schülerinnen und Schüler selbstständige Erkundungen anstellen können und so ihre individuellen Erkenntniswege gehen.

Solche Ausschnitte aus der Mathematik dürfen nicht in (Pseudo-)Anwendungen eingekleidet sein, die nur einen Vorwand bilden, mathematische Fertigkeiten abzuspulen (vgl. Freudenthal [22], S. 79): „Wenn ich über beziehungshaltige Mathematik spreche, so lege ich den Nachdruck auf Beziehungen zu erlebter Wirklichkeit, nicht zu einer eigens zu diesem Zweck konstruierten toten Scheinwirklichkeit, wie sie etwa im Rechenunterricht häufig heraufbeschworen wird.“ Sie können aus wirklich authentischen Problemen abgeleitet sein oder aber eingekleidet in dem Sinne, dass Sachkontexte helfen, die Mathematik zu verstehen bzw. zu erfinden (vgl. Thomas Jahnkes Überlegungen zu authentischen Aufgaben [40]). Dabei sollte die Komplexität der Sachverhalte nicht zu sehr vereinfacht werden, denn damit verlieren viele Problem- und Fragestellungen ihren Reiz. Die Formulierung, dass Inhalte für die didaktische Verwendung „heruntergebrochen“ werden, spricht in ihrer zerstörerischen Konnotation für sich.

Darüberhinaus verführen missverstandene spiralförmig aufgebaute Curricula nach wie vor immer wieder dazu, dass zunächst die „Grundlagen“ gelegt werden, in dem Sinne, dass Grundbegriffe wie „Winkel“ in jüngeren Klassen unterrichtet werden, um dann später, wenn sie in komplexeren Zusammenhängen benötigt werden, (scheinbar) auf sie zurückgreifen zu können.

Die Ausschnitte aus der Mathematik, an denen die Wissenschaft Mathematik erfahrbar gemacht wird, sollten hingegen die Möglichkeit bieten, Begriffe zu bilden und dann auch anzuwenden und damit arbeiten zu können. Idealerweise sind sie wie kleine Forschungsprojekte aufgebaut, die die Erlangung eines Resultates ermöglichen und nicht nur die Begründung „Das braucht ihr später“ als Ergebnis haben. Wittenberg [91] formuliert es so, dass die elementare Mathematik als ein in sich abgeschlossener Gegenstand unterrichtet werden solle, so dass neue Begriffe und Methoden auch gleich zur Anwendung kommen, und grenzt sich damit ebenso gegen die traditionell verankerte Anhäufung von „Vorratswissen“ ab, das bei einem Großteil der Schülerinnen und Schüler niemals zur Anwendung gelangen wird.

1.2 Der Grammatik der Mathematik gerecht werden – Authentizität der mathematischen Methoden

Wenn nun also Schülerinnen und Schüler sich mit authentischer Mathematik auseinandersetzen, so sollen sie nicht nur authentische Anwendungen und Kontexte kennenlernen, sondern auch spezifische Arbeitsweisen und Methoden. Die zweite Aufgabe in der Vorbereitung eines authentischen Mathematikunterrichts ist, herauszufinden, was das Arbeiten in dem gewählten Gebiet ausmacht. Damit sind nicht die weithin bekannten mathematischen Standardmethoden wie „Differenzieren" oder „Beweis durch Widerspruch" gemeint, sondern, was typische Methoden auf dem Weg der Erarbeitung sind, also beispielsweise „durch Experimentieren Gesetzmäßigkeiten erkennen" bei der Arbeit mit dynamischer Geometriesoftware oder „Berechnen durch Zerlegung in unendlich kleine Teile" bei der Infinitesimalrechnung.[3]

Wir wollen hier von der Grammatik der Mathematik bzw. der mathematischen Methoden sprechen. Jedes Fachgebiet hat seine eigenen Gepflogenheiten und Regeln. Das betrifft nicht nur die Forschungsmethoden, sondern auch die Art, Mathematik zu kommunizieren. Diese unterschiedlichen Kommunikationsstile haben etwas damit zu tun, wie die „Grammatik" des Fachgebietes beschaffen ist.

Wie also finden Lehrer/innen, Didaktiker/innen und Lehrplanmacher/innen etwas über die Grammatik der einzelnen Stoffgebiete heraus?

Wittenberg schlägt eine Analyse der Mathematik und ihrer Methoden vor: Was sind die spezifischen Charakteristika der Mathematik? So fordert er ([91], S. 56):

> „Wir müssen uns in eindringlicher Weise damit auseinandersetzen, was für Mathematik und mathematisches Denken kennzeichnend – und damit für den Unterricht verpflichtend – ist."

Vollrath geht sogar noch etwas weiter, indem er schreibt ([83], S. 26):

> „Mit der Forderung, dass Mathematikunterricht authentisch sein muss, ist die Verantwortung der Lehrenden der Mathematik gegenüber angesprochen."

Bei Klafki finden wir im Rahmen der Diskussion des exemplarischen Ansatzes (der einige Überschneidungen mit dem authentischen Mathematikunterricht hat) eine Abgrenzung gegenüber „den Wissenschaften" ([44], S. 147): „Eine der zentralen Fragen, die bei der Fortführung der Diskussion um exemplarisches Lernen wieder aufgegriffen werden muß, lautet: Nach welchen Kriterien sind nun jene ‚allgemeinen' Strukturen, Gesetzmäßigleiten, Prinzipien, Zusammenhänge ... zu bestimmen, die sich die Lernenden auf dem Weg über exemplarisches Lehren und Lernen aneignen

[3] Bei Aebli finden wir ähnliche Gedanken, er spricht von der „Bestimmung der zugrundeliegenden Operationen und ihrer logischen Struktur" ([2], S. 228).

sollen? Schon in der ersten Diskussionsphase um das exemplarische Prinzip ist bisweilen die Auffassung aufgetaucht, es seien ‚die Wissenschaften', die diese Frage zu beantworten hätten."

Die Grammatik der mathematischen Methoden zu erkennen und zu beschreiben ist eine Tätigkeit, die üblicherweise nicht in den Fachwissenschaften ausgeführt wird. Dort wird auf dieser Ebene nur selten reflektiert.[4] Es ist also ein didaktischer Blick auf das mathematische Arbeiten, der die Charakteristika dieses Arbeitens ans Licht holt.

Hans Freudenthal schreibt dazu ([22], S. 110): „Die Mathematik ist bis heute fast nur als Fertigprodukt analysiert worden, und wenn dann auf die Analyse eine formalisierte Synthese folgt, so wird das Erzeugnis als Fertigprodukt präsentiert." Er beschreibt Wissenschaft als schöpferisches Tun. Zur Auffassung von Mathematik als einer Tätigkeit im Gegensatz zum Fertigprodukt gehört, ([22], S. 114) „daß man das zu unterrichtende zunächst als eine Tätigkeit analysiert. Zur Analyse der Mathematik als Tätigkeit ist wenig geschehen." (Das war 1973!)

Auch heute wird der Fokus mathematikdidaktischer Forschung oft anders gewählt. Die Diskussion über Unterrichtsziele beschäftigt sich überwiegend mit Schülertätigkeiten bzw. in den letzten Jahren mit Kompetenzen, weiter mit gewissen Fertigkeiten (wie etwa der Konstruktion einer Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal) oder auch mit Bildungs- und Mündigkeitsaspekten. Die Charakteristik mathematischer Denkweisen wird nur selten untersucht, obwohl solch eine Analyse wesentliche Anhaltspunkte für den Unterricht und dessen Ziele liefern kann. Vorher festgelegte Methoden an neuen Aufgaben abzuarbeiten ist kein mathematisches Handeln (könnte somit auch in ganz anderen Sachkontexten geschehen) und eröffnet somit auch keine Möglichkeit zu einer authentischen Begegnung mit Mathematik. Forschendes Handeln, das erfahrbar werden lässt, wie typische mathematische Denk- und Arbeitsweisen entstehen und zum Einsatz kommen, ermöglicht authentische Begegnungen. Ohne ein Bewusstsein für diese für die Mathematik charakteristischen Tätigkeiten kann aber kein authentischer Unterricht geplant und vorbereitet werden.

Eine Analyse der typischen Methoden eines Fachgebietes erfordert eine genaue Kenntnis derselben, was wiederum Forderungen an die universitäre Lehrerausbildung nach sich zieht (vgl. z. B. Hußmann und Leuders [37]). Nur wer selbst Erfahrungen im forschenden Umgang mit der Mathematik gemacht hat, kann die Charakteristik der Denkweisen erkennen. Welche Herangehensweisen sind typisch für das Fachgebiet? Gibt es Methoden, die immer wiederkehren? An welche Vorerfahrungen kann angeknüpft werden? Welche Vorstellungen aus dem Alltag helfen, eine adäquate Sichtweise einzunehmen? Welche Stufen der Formalisierung sind erkennbar? Fragen dieser Art erschließen die Grammatik eines mathematischen Fachgebietes. Sie sind didaktisch motiviert und werden daher selten von den Fachwissenschaftlern gestellt. Sie sind Teil einer auf Authentizität zielenden didaktischen Analyse.

[4] Eines der raren Bücher zu diesem Thema ist „Erfahrung Mathematik" von Davis und Hersh [17]. Ganz anders ausgerichtet, aber dennoch auch „metamathematisch" ist der Klassiker „Schule des Denkens" von Polya [65].

1.3 Das Erlebnis Mathematik – authentische Auseinandersetzung mit Mathematik

Nach dem Blick auf die Mathematik und auf die didaktische Analyse von Mathematik wenden wir uns nun dem dritten und vielleicht wichtigsten Aspekt authentischen Mathematikunterrichts zu: der authentischen Begegnung von Schülerinnen und Schülern mit Mathematik. Zwei zum Teil ineinander verschränkte Gesichtspunkte spielen dabei eine Rolle: die Sequenzierung des Stoffes und die Unterrichtsmethodik.

Der Titel dieses Abschnitts zeigt schon, dass es darum gehen soll, den Schülerinnen und Schülern ein echtes Erlebnis von Mathematik zu ermöglichen, und zwar durch eigenes Tun. Erlebnisse sind erst richtige Erlebnisse, wenn sie selbst gemacht werden. Stellvertretend gemachte und dann weitergegebene Erfahrungen werden je nach Kontext oft nur oberflächlich wahrgenommen und verankern sich dann nicht nachhaltig im aktiven Wissensschatz. Um zu wissen, wie ein Lagerfeuer riecht, sich anfühlt und anhört, muss man tatsächlich daran gesessen haben, möglichst auch selbst das Holz dafür zusammengesucht haben. Die Erzählung davon, wie ein Lagerfeuer ist, wird das Erlebnis nicht annähernd an Intensität, Reichhaltigkeit und Nachhaltigkeit erreichen. Was aber die Kinder oder Jugendlichen dabei nicht selber leisten müssen, ist die Vorbereitung: die Wahl eines passenden Ortes, die Wetterbeobachtung, die Bereitstellung von Anzünde- und Löschmitteln. Über diese Vorbereitungen (im übertragenen Sinne) haben wir uns in den vorangehenden Abschnitten Gedanken gemacht. Sie sind Aufgabe der Lehrpersonen. Und selbstverständlich kann nicht der gesamte Unterricht aus solchen „Lagerfeuer-Erlebnissen“ bestehen.

Authentische Begegnungen mit Mathematik im Klassenzimmer werden nur in einem schülerzentrierten Unterricht möglich, der eine eigenständige Erarbeitung ermöglicht. Dabei darf es nicht nur um die Erarbeitung von Lösungen oder Rechenwegen gehen, sondern es muss bereits das Finden von Fragestellungen Teil des Erarbeitungsprozesses sein. Auch hierzu finden wir bei Wittenberg einen ersten Ansatz ([91], S. 59):

> „Von ‚gültiger Erfahrung‘ der Mathematik kann denn auch nur in dem Maße die Rede sein, wie der Unterricht nicht nur die Ergebnisse, sondern das ganze Vorgehen in überzeugender Weise innerhalb des geistigen Erfahrungsbereichs des Schülers zustandekommen läßt. Dieser Grundsatz diktiert einen *genetischen* Unterricht; einen Unterricht, der darin besteht, die Schüler gleichsam die Mathematik von Anfang an wieder entdecken zu lassen.“

Wie geschieht nun diese „gültige Begegnung“ mit der Mathematik? Wie ist sie überhaupt möglich? Das, was immer wieder als Nachteil der Mathematik gegenüber den Naturwissenschaften angesehen wird, zeigt Wittenberg als Vorteil auf ([91], S. 57):

> „Unter allen Wissenschaften ist die Mathematik dadurch ausgezeichnet, daß sie sich vollumfänglich in unserem eigenen Denken erschließt – soweit sie sich uns überhaupt erschließt. [...] die Mathematik ist par excellence das Reich der Selbständigkeit und Eigengesetzlichkeit der Vernunft."

Begegnungen mit der Mathematik benötigen keine Geräte und Substanzen, sie können überall und jederzeit passieren und überall hin mitgenommen werden. Der Beginn der Begegnung benötigt aus diesem Grund besondere Aufmerksamkeit, denn es müssen ohne plakative äußere Anlässe Anstöße zum selbständigen Denken gegeben werden. Ist dieser Beginn erst einmal geschafft, so verselbständigen sich die Gedanken häufig und fällt es nicht mehr schwer, eigene Fragen und Ideen zu entwickeln. Daher ist die Wahl der Problemstellungen für den Anfang des Unterrichts von großer Bedeutung. Mit der Struktur von für einen konstruktivistisch orientierten Lernprozess geeigneten sogenannten Intentionalen Problemen hat sich Stephan Hußmann in seiner Dissertation [36] ausführlich auseinandergesetzt.

Wenn hier von Aufgaben- und Problemstellungen in einem authentischen Mathematikunterricht die Rede ist, so ist eine klare Abgrenzung gegen eine übertriebene Betonung der Echtheit der Daten und Aufgaben notwendig. Unter Bezugnahme auf die PISA-Studie, in deren Erläuterungen der Begriff der authentischen Aufgaben verwendet wird, und zwar in der Bedeutung, dass reale Daten und reale Fragestellungen darin vorkommen, bemerkt Thomas Jahnke ([40], S. 8): „Die Crux der authentischen Aufgaben ist ihr Mangel. Es gibt keine oder – wenn Sie es versöhnlicher ausdrücken wollen, fast keine. [...] Es grenzte auch an ein Wunder, wenn sich dieses Konzentrat ‚Curriculum' im Nachhinein wieder auflösen ließe in authentische Aufgaben. Ich will nicht die Existenz authentischer Kontexte[s] bezweifeln. Das ‚Leben' oder die Wirklichkeit mag in diesen auch Fragen aufwerfen, manchmal vielleicht sogar mathematikhaltige Fragen, aber Aufgaben sind von Aufgabenstellern konstruiert und sind Träger deren Intentionen, jedenfalls sind sie das in dem Maße, wie der Aufgabensteller dazu in der Lage war, seine Intentionen in seinen Aufgaben umzusetzen."

Büchter/Leuders ([15], S. 73–88) plädieren für eine Authentizität der Aufgaben, die sich nicht auf die Kontexte, sondern auf die Schülertätigkeiten beziehen: „Mathematikaufgaben sind authentisch, wenn sie Schülerinnen und Schüler zu mathematischen Tätigkeiten anregen, die typisch für die Entstehung und Anwendung von Mathematik sind." (S. 86) Die Forderung nach Authentizität „[...] führen zur Forderung eines konsequent genetischen, problemorientierten und schülerzentrierten Unterrichts." (S. 87)

Sowohl Wittenberg als auch Büchter und Leuders erwähnen den genetischen Unterricht. Bei Freudenthal finden wir diesen schönen Satz, der die genetische Methode auf höchstem Niveau einordnet ([22], S. 124): „Die Nacherfindung, die didaktisches Prinzip auf Forschungsniveau ist, soll Prinzip des ganzen mathematischen Unterrichts sein [...]" Die Forderung nach genetischem Unterricht ist schon sehr alt (vgl. Winter [88], S. 74) und wird immer wieder aufs Neue erhoben. Einer der Hauptvertreter ist Martin Wagenschein [84].

Die Frage, warum sie sich noch immer nicht stärker durchgesetzt hat, wäre Thema einer eigenen Forschungsarbeit. Hier kann nur vermutet werden, dass es damit zusammenhängt, dass die Ausbildung von zukünftigen Lehrerinnen und Lehrern nach wie vor sehr stark axiomatisch ausgerichtet ist und die so ausgebildeten Lehrkräfte in der Praxis des Unterrichtens dann einerseits auf ihre universitäre Ausbildung zurückgreifen und andererseits auf ihre Erfahrungen aus der eigenen Schulzeit. So tradiert sich nach wie vor der belehrende und stark fachsystematisch ausgerichtete Unterricht.

Weiter wurde der genetische Unterricht zunächst mit einer fragend-entwickelnden Methode in Verbindung gebracht (vgl. Lennés Kritik an Wittenberg und Wagenschein [48], S. 54–68): Wagenschein stellte dem genetischen Prinzip das sokratische und das exemplarische zur Seite (vgl. [84]). Heute wird das genetische Prinzip methodisch in anderen Zusammenhängen gesehen, wie weiter unten erläutert wird, so dass sich ein neuer Blick darauf eröffnet.

Wittmann schreibt zur Wahl der Inhalte für einen genetischen Unterricht ([92], S. 148): „Das genetische Prinzip läßt sich am leichtesten an Inhalten verwirklichen, die in sich, zu anderen Inhalten und zur Wirklichkeit vielfältige und kräftige Bezüge aufweisen.“ Auch Freudenthal betont den hohen Stellenwert der Beziehungshaltigkeit ([22], S. 75 ff.). Damit führen die von der authentischen Begegnung der Schülerinnen und Schüler ausgehenden Überlegungen wieder zu den authentischen Inhalten. Hier wird deutlich, wie sehr die verschiedenen Facetten der Theorie des authentischen Mathematikunterrichts miteinander verknüpft sind.

Den Unterricht genetisch aufzubauen bedeutet, die Sequenzierung des Stoffes so vorzunehmen, dass die Schülerinnen und Schüler sich die Inhalte und Begriffe durch eigenes Forschen und (Nach-)Erfinden erarbeiten können. Die Betonung liegt auf der Erfahrung der Genese eines Stoffes. Nicht das fertige Gedankengebäude wird präsentiert, angefangen bei den wichtigsten Definitionen und endend bei Beweisen der wichtigsten Sätze, sondern es wird dieses Gedankengebäude Stück für Stück selbst errichtet.

Und damit sind wir wieder bei der Authentizität angelangt: In der Forschung stehen Definitionen nie am Anfang, sondern ergeben sich aus den Anforderungen an das Objekt im Forschungsgang. Beweise entstehen oft vor den Sätzen und werden für die saubere und knappe Niederschrift selten in der Vorgehensweise der Entstehung präsentiert, sondern meist „rückwärts“ aufgeschrieben. Kleinere Hilfssätze, die gerne als Folgerung aus den mächtigen Sätzen ausgegeben werden, waren oft zuerst da und wurden dann noch weiter „zugespitzt“, um den wirkungsvolleren Satz oder aber einen leichter durchführbaren Beweis zu erhalten.

Diese Entstehung (oder Genese) von Mathematik sollen Schülerinnen und Schüler in einem genetischen Mathematikunterricht erleben können, um ein Verständnis für mathematische Werkzeuge, Methoden und Theoriegebäude entwickeln zu können. Sie sollen das neu Erlernte in Beziehung zu ihrem bereits vorhandenen Wissen setzen können bzw. darauf aufbauen können. Freudenthal schreibt sehr eindrucksvoll über die Folgen des Fehlens von Bezügen zum Wissen und der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler ([22], S. 78): „Beziehungslos Gelerntes ist schnell vergessen. Wie oft merkt der Lehrer nicht zu seiner großen Enttäuschung, daß vor wenigen Wochen Gelerntes, wie es scheint, spurlos verschwunden ist, wenn es inzwischen nicht geübt wurde. Daß ein logischer Weg vom Damaligen zum Heutigen führte, hilft da nichts, denn es war nicht der Schüler, sondern der Lehrbuchverfasser, der diesen Zusammenhang konstruiert hatte, in der Meinung, daß solche Konstruktionen geheimnisvoll im Geist des Schülers wirken. Die Brocken Mathematik, die der Schüler in diesen Wochen betrieben hat, waren Fremdkörper in der von ihm erlebten Wirklichkeit; sie werden so schnell wie möglich eliminiert.“

In Wittenbergs Beschreibung des Lern- und Erkenntnisweges, ausgehend von Fragestellungen, die die Schülerinnen und Schüler wirklich bewegen, zeigt sich zugleich, dass damit auch Problemlösekompetenzen gefördert werden ([91], S. 60): „Die Echtheit des mathematischen Unterrichts am Gymnasium beginnt also genau dort, wo wirkliche Mathematik ihren Ursprung hat: bei den Fragestellungen. Sind diese dem Schüler einmal zum Erlebnis geworden, so muß er sich mit ihnen in wahrhaft mathematischer Weise auseinandersetzen. [...] Es muß sich an ihnen dasjenige vollziehen, was für die Mathematik, wie für jedes wissenschaftliche Tun, charakteristisch ist, aber für die Mathematik in der Schulstube vollumfänglich erfahren werden kann: das allmählich zielsicher und zweckmäßig werdende Ringen des Geistes mit seinem Gegenstand – die anfängliche Hilflosigkeit, die allmähliche Einsicht, das plötzliche Verstehen, das Ahnen verborgener Zusammenhänge, der verfängliche Irrtum, der scheinbar vielversprechende, aber irreführende Versuch, die verführerische Verallgemeinerung, das Erlebnis des zunächst Unbegreiflichen, das unüberwindlich Schwierige, das Selbstverständliche, die Entlarvung des nur scheinbar Selbstverständlichen; das Schmieden zweckmäßiger geistiger Werkzeuge, das Prägen adäquater Begriffe, das schöpferisch-kritische Neudenken des bereits Erreichten; das allmähliche Zustandekommen des Überblicks, die Schaffung einer folgerichtigen, systematischen, in sich verhältnismäßig geschlossenen Theorie; das allmählich erstarkende Erleben des Besitzes geistiger Macht, der Fähigkeit zu eigener Einsicht im eigenen Denken.“

Wittenberg betont hier noch einmal, dass mathematisches Forschen oder doch zumindest mathematiktypisches Forschen tatsächlich ganz („vollumfänglich“) im Klassenzimmer erfahrbar gemacht werden kann, eben weil es im eigenen Denken geschieht. Die „Realistic Mathematics Education“ in den Niederlanden bezieht sich ebenso auf diese Tatsache: Der Begriff „realistic“ bezieht sich nicht auf „real world“, sondern auf das niederländische „sich realizeren“, was „sich vorstellen“ bedeutet (vgl. Van den Heuvel-Panhuizen [80]).

Nun bleibt noch ein Blick auf die Unterrichtsmethodik zu werfen. Ein schülerzentrierter, problemorientierter und genetischer Unterricht kann nur stattfinden, wenn genügend Freiräume für entdeckendes Forschen[5] geschaffen werden.

[5] Winter erkärt ([88], S. 2): „‚Entdeckendes Lernen‘ ist weniger die Beschreibung einer Sorte von beobachtbaren Lernvorgängen (wenn so etwas überhaupt möglich ist), sondern ein theoretisches Konstrukt, die Idee nämlich, daß Wissenserwerb, Erkenntnisfortschritt und die Ertüchtigung in Problemlösefähigkeiten nicht schon durch Information

Peter Gallin und Urs Ruf nehmen eine radikale Position ein, indem sie die authentische Begegnung mit dem Stoff durch größtmögliche Freiheit in der Auseinandersetzung einfordern ([23], S. 24): „Der Schlüssel zu einer authentischen Begegnung mit einem Schulstoff liegt im vollständigen Verzicht auf fachbezogene Erwartungen an den Lernenden. Er soll dem Gegenstand vorerst so offen und unvoreingenommen wie möglich gegenübertreten können, und der Fluss seiner Assoziationen darf durch keinerlei Vorstellungen von RICHTIG und FALSCH oder BRAUCHBAR und UNBRAUCHBAR gehemmt und gelenkt werden. Es geht vorerst einmal nur um die Sicherung der eigenen Position und die Mobilisierung aller verfügbaren Kräfte der Psyche.“

Die authentische Auseinandersetzung spielt sich also sowohl auf inhaltlicher als auch auf affektiver Ebene ab. Die Autoren heben hervor, dass authentische Begegnungen mit dem Stoff nur geschehen können, wenn eine innere Anteilnahme der Schülerinnen und Schüler hervorgerufen werden kann. Der Gegensatz dazu ist Schulwissen, das aus angelernten Techniken besteht. Die Anwendung dieses Wissens spielt sich außerhalb der Person ab, das angelernte Wissen wird schnell vergessen (vgl. Gallin/Ruf [23], S. 19).

Die von Gallin und Ruf entwickelte Methode des dialogischen Lernens ermöglicht authentisches Lernen in Reinform. Der Dialog zwischen Lernenden und Lehrern spielt sich dabei zu einem großen Teil in sogenannten Reise- oder Lerntagebüchern ab, in denen die Schüler ihre sämtlichen Gedanken im Rahmen der Auseinandersetzung mit dem Stoff niederschreiben. Dabei sind Fragen, Irrwege und wiederholte Lösungsversuche ausdrücklich erwünscht. Die Rückkopplung durch den Lehrer oder die Lehrerin erfolgt ebenfalls im Lerntagebuch. Auf „Ich-Phasen“ des selbständigen Erforschens folgen „Du-Phasen“, in denen die eigenen Ideen mit denen von anderen Schülerinnen oder Schülern ausgetauscht werden. In den „Wir-Phasen“ wird eine gemeinsame (Fach-)Sprache und Sichtweise entwickelt, die es ermöglicht, problemlos mit den anderen zu kommunizieren.

Die Arbeit mit Lerntagebüchern erfordert einen sehr hohen Zeitaufwand für die Lehrpersonen nach dem Unterricht, der in einem Fach, das nicht zu den anerkannten sogenannten „Korrekturfächern“ gehört, nur selten wahrgenommen und honoriert wird. Daher ist es im Unterrichtsalltag nicht immer möglich, dialogisches Lernen in Reinform zu verwirklichen. Immer wieder aber können einzelne Lernabschnitte auf diese Art und Weise gestaltet werden. Die Verschriftlichung mathematischer Gedanken in nicht-formalisierter Sprache sollte in jedem Fall eines der Ziele von Mathematikunterricht sein. Durch die schriftliche Niederlegung der gemachten Erfahrungen in der Begegnung mit dem Stoff werden Problemlösestrategien und Lösungsmethoden bewusst gemacht, die sonst auf einer intuitiven Ebene verbleiben würden (vgl. Hußmann/Leuders [37]).

von außen geschieht, sondern durch eigenes aktives Handeln unter Rekurs auf die schon vorhandene kognitive Struktur, allerdings in der Regel angeregt und somit erst ermöglicht durch äußere Impulse.“

Es sind aber auch Mischformen möglich, in denen im Kleinen dialogisches Lernen stattfindet. Stets sollte das selbständige Erforschen im Mittelpunkt stehen, es muss aber nicht den ganzen Unterricht dominieren. Büchter und Leuders schreiben den nüchtern-sachlichen Kommentar zu ihrer eigenen Forderung nach einem konsequent genetischen, problemorientierten und schülerzentrierten Unterricht ([15], S. 87): „Aus lernökonomischen (und auch aus lernpsychologischen) Gründen sind diesem Vorgehen Grenzen gesetzt. Schüler können nicht *alle* Mathematik nacherfinden.“

Im (deutschen) Unterrichtsalltag scheint es realistisch, ausgehend von den vorhandenen Unterrichtsstilen und -gewohnheiten an einer behutsamen Veränderung zu arbeiten. Ideal dafür sind neue Themen, für die es noch keine unterrichtliche Tradition gibt. Eine Mischung aus geführtem und freiem Arbeiten gibt genügend Halt für die Lehrkräfte und öffnet den Unterricht dennoch für authentische Begegnungen mit Mathematik (vgl. hierzu die Ausführungen von Andreas Schuster [74] im Rahmen der Diskussion geeigneter Unterrichtsformen zur Vermittlung von Inhalten der kombinatorischen Optimierung: Er bezeichnet die zusammenwirkende oder aufgebend-ausführende Unterrichtsform als ideal für die Thematik und bemerkt, dass der von ihm erarbeitete Unterrichtsstil „die als besonders effizient geltende Balance zwischen Eigentätigkeit und vorsichtig gelenkter Instruktion, zwischen sachsystematischem und situiertem Lernen in natürlicher Weise zu realisieren vermag“ (S. 97)).

Wie dabei das Verhältnis von eher geführten Phasen zu freien Arbeitsphasen gestaltet wird, hängt von etlichen Rahmenbedingungen ab. Der 45-Minuten-Takt im deutschen Schulwesen verhindert meist längere Phasen selbständigen Arbeitens, und auch nicht jede Klasse ist dafür gleich gut geeignet bzw. muss oft erst in ausdauernder Übung an einen selbstverantwortlichen Lernstil herangeführt werden. Dennoch können in kleineren Dosen authentische Begegnungsmöglichkeiten mit Mathematik geschaffen werden, indem die Problemstellungen verkleinert werden oder auch innerhalb von enger gestellten Aufgaben kleinere Forschungsaufträge gegeben werden.

Das Erlebnis Mathematik, das ein authentischer Mathematikunterricht ermöglichen soll, kann auf vielen unterschiedlichen Wegen verwirklicht werden, solange sich dabei Mathematik nicht als Fertigprodukt, sondern als von den Schülerinnen und Schülern selbst nachvollziehbarer und sogar selbst zu gestaltender Prozess darstellt. Dazu noch einmal Freudenthal ([22], S. 76): „Ich möchte, daß der Schüler nicht angewandte Mathematik lernt, sondern lernt, wie man Mathematik anwendet.“

1.4 Kombinatorische Optimierung als Thema für einen authentischen Mathematikunterricht

> „Wenn unser Unterricht heute darin besteht, daß wir Kindern Dinge eintrichtern, die in einem oder zwei Jahrzehnten besser von Rechenmaschinen erledigt werden, beschwören wir Katastrophen herauf. Ehrlich gesagt, wir wissen von keinem Stoff, den wir den Kindern übermitteln sollen, ob er der rechte sei. Wir können sie aber etwas Kostbares lehren: wie man den Stoff meistert.“ (Freudenthal [22], S. 61)

Die zweite Hälfte dieses Zitats steht auch als Leitwort über der gesamten vorliegenden Arbeit. Es soll daran erinnern, dass kein Stoff, der für die Schule gewählt wird, über jeden Zweifel erhaben ist und sich neue Inhalte über längere Zeiträume hinweg bewähren müssen. Dennoch wird hier der Versuch unternommen, zu begründen, warum die kombinatorische Optimierung einen festen Platz in den Lehrplänen finden sollte. Die nachfolgenden hier sehr knapp zusammengefassten Thesen werden in den weiteren Kapiteln dieser Arbeit genauer untersucht.

Das Themengebiet der kombinatorischen Optimierung eignet sich ganz besonders zur Verwirklichung eines authentischen Mathematikunterrichts.

- Es finden sich darin leicht zugängliche Problemstellungen aus der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler, die eine authentische Begegnung mit Mathematik direkt ermöglichen.
- Die spezifischen mathematischen Methoden knüpfen an ein im Alltag erworbenes Handlungsrepertoire an und bleiben durch ihre oftmals algorithmische Struktur auch bei wachsender Komplexität für Schülerinnen und Schüler erfassbar.
- Die algorithmischen Methoden sind handlungsorientiert und können von den Schülerinnen und Schülern handelnd entdeckt werden.
- Es lassen sich in sich abgeschlossene Themenkomplexe finden, die nicht hierarchisch aufgebaut sind, so dass ein freies Entdecken durch die Schülerinnen und Schüler ohne vorgegebene Reihenfolge möglich ist. Die Leitlinie des Optimierens bildet aber dennoch einen roten Faden für die Erarbeitung.
- Die grundlegenden Begriffe können von den Schülerinnen und Schülern während ihrer Auseinandersetzung mit der Problemstellung erschlossen werden.
- Die Objekte, mit denen vorwiegend hantiert wird, Graphen, sind in ihrer Darstellung sowohl handlich (durch ihre einfache Definition) als auch äußerst flexibel. Dadurch kann ohne Einschränkungen experimentiert werden. Vermutungen und Beweisideen können so selbständig erarbeitet werden.
- Die Themen haben sowohl einen starken Anwendungsbezug als auch eine direkte Anknüpfung an aktuelle Forschungsthemen. Sie haben Verbindungen zur theoretischen Informatik und verkörpern gleichzeitig ein mathematisches Fachgebiet von wachsender Bedeutung.

2 Graphentheorie und kombinatorische Optimierung als Schulstoff in der Bundesrepublik Deutschland

Die Idee, diskrete Mathematik besser im Schulunterricht zu etablieren, ist nicht neu. In diesem Kapitel soll untersucht werden, welche Ansätze es in der Bundesrepublik Deutschland gab, Graphentheorie und kombinatorische Optimierung in die Schule zu bringen. Insbesondere wird anhand der Quellen nach Gründen geforscht, warum sich diese Themen bisher nicht fest im Unterricht etabliert haben, sondern fast ganz wieder aus dem Blickfeld verschwunden sind.

Es gibt international einige interessante Ansätze (z. B. in den USA, in den Niederlanden, in Österreich, im Iran), doch haben diese so gut wie keinen Einfluss auf deutsche Curricula gehabt. Zwar haben die US-amerikanischen *NCTM-Standards* von 1989 und die *Principles and Standards* von 2000 die Curriculumdiskussion in Deutschland stark beeinflusst, nicht aber in Bezug auf den von uns gewählten Themenkreis. Eine Übersicht über die historische Entwicklung von unterschiedlichen Themen der diskreten Mathematik im Unterricht findet sich in der Dissertation von Silke Thies ([78], S. 24–35).

Dass Themen aus Graphentheorie und kombinatorischer Optimierung als Unterrichtsstoff, aber auch das Fachgebiet der diskreten Mathematik tatsächlich im Allgemeinen nicht (mehr) im Bewusstsein von Lehrerinnen und Lehrern vorhanden sind, zeigt das Editorial des Heftes „Diskrete Mathematik“ der Zeitschrift *Mathematik lehren* vom April 2005 (Bruder/Weigand [14], S. 3):

> „Liebe Leserin, lieber Leser,
> Diskrete Mathematik in der Schule? Schon wieder ein zusätzliches neues Gebiet, neue Inhalte? Es geht weder um mehr Stoff, noch um etwas ganz Neues: Fragen nach dem kürzesten Weg bei U-Bahn-Fahrten [...] können Beispiele für Diskrete Mathematik liefern. Derartige alltagsnahe Anwendungsfelder vermitteln Sinn und Bedeutung für mathematisches Wissen im Unterricht. Zudem bieten diese leicht zugänglichen Fragestellungen auch eine Vorstellung davon, womit sich moderne Mathematik beschäftigt.“

Etwas weiter hinten wird ermutigend von „moderner aber deshalb nicht schwieriger Mathematik“ ([14], S. 3) gesprochen. Offenbar muss man den Lehrerinnen und Lehrern von heute aufs Neue Mut machen, sich mit diesem ihnen unbekannten, neuen und modernen Gebiet zu beschäftigen. Dass es tatsächlich so ist, bestätigen unsere im Rahmen von Lehrerfortbildungen gemachten Erfahrungen. (Nach einmal überwundener Scheu ist dann aber fast durchgängig eine große Begeisterung für diese Inhalte und Bereitschaft zur Umsetzung im Unterricht zu beobachten!) Dass die Wurzeln der didaktischen Aufarbeitung diskreter Themen bis in den Anfang der 1970er Jahre zurückreichen, Graphentheorie und kombinatorische Optimierung also gar nicht neu für die Schule sind, ist daher für viele eine Überraschung.

2.1 Die 1970er Jahre

In den 1970er-Jahren engagierten sich eine Reihe von Mathematikdidaktikern für diskrete Themen. Die zunehmende fachwissenschaftliche Bedeutung von Graphentheorie und Kombinatorik mit ihren Anwendungen regte die Mathematikdidaktiker dazu an, diesen noch recht jungen Zweig der Mathematik nach für die Schule brauchbaren Themen zu durchforsten. Davon zeugen z. B. die drei der Graphentheorie gewidmeten Hefte von „Der Mathematikunterricht" [68], [69], [70], sowie die Bücher von Ore [64] und Wippermann [89], aber auch zahlreiche Einzelartikel (s. u.)

Interessant ist, dass die Graphentheorie sowohl als Fortführung der (Schul-)Mengenlehre gesehen wurde als auch als Gegengewicht eben dazu. Das zeigen Ausschnitte aus den Einführungen zu den Themenheften „Graphentheorie" und „Graphentheorie II" der Zeitschrift *Der Mathematikunterricht* von 1973 und 1974:

> Georg Schmitz schreibt 1973:
> „Graphentheorie ist ein Zweig der kombinatorischen Topologie [. . .]. Als Bereicherung für einen modernen Mathematikunterricht bieten sich Graphentheorie und graphentheoretische Methoden einmal wegen ihrer starken Beziehungen zur Mengenlehre an. Strukturen auf Mengen oder Abbildungen lassen sich häufig in einfacher Weise durch Graphen zeichnerisch darstellen. Es bietet sich hier die Möglichkeit, anschauliche und formale Arbeitsweisen miteinander zu verbinden." ([70], S. 3)

> Hans-Günther Bigalke schreibt 1974:
> „Die Modernisierung des Mathematikunterrichts wird heute leider fast ausschließlich – leider auch völlig mißverständlich – unter dem Schlagwort ‚Mengenlehre' gesehen. Für den Kenner der Materie zeigt sich die Neuorientierung des Mathematikunterrichts jedoch sehr wesentlich auch noch auf anderen Gebieten. Eines dieser Gebiete ist die Graphentheorie." ([68], S. 3)

> Ebenfalls 1974 schreibt Bigalke:
> „In entsprechenden Vorträgen und Veröffentlichungen werden immer wieder zwei Dinge genannt, die die besondere Attraktivität der Graphentheorie für die Schule zeigen sollen: die große Anschaulichkeit und die immense Anwendungsfreudigkeit. Durch sie soll dem vorherrschenden Trend zu Strukturen und zur Axiomatik ein Gegengewicht geliefert werden." ([9], S. 189)

Bereits 1970 erschien ein Artikel von Rolf Nußbaum und Roland Stowasser [63] über Färbungen in dem Heft „Elementare Topologie und Unterricht" von *Der Mathematikunterricht*. Der Zugang zum Thema Färbungsprobleme" erfolgt von der Topologie her über die Definitionen von Nachbargebieten und Karten. Es werden einige Sätze über Karten erarbeitet, bis hin zum Kartensatz für p-henkelige Kugeln. Dann werden diese Kenntnisse für die Färbeproblematik verwendet und der Fünffarbensatz, der Siebenfarbensatz auf dem Torus und der Sechsfarbensatz für das Möbiusband bewiesen. Das Vierfarbenproblem war damals noch ungelöst. Insgesamt sind die Ausführungen sehr theoretisch und operieren überwiegend mit „topologischer Arithmetik“, so dass sich die Frage stellt, wie die Behandlung dieses Stoffes im Unterricht konkret aussehen könnte. Darüber gibt der Artikel keine Auskunft (offenbar den Gepflogenheiten seiner Zeit folgend). Das didaktische Potential von Färbungsproblemen ist den Autoren bewusst, wie das folgende Zitat zeigt, es wird allerdings in dem Artikel nicht sehr deutlich herausgearbeitet. Die Autoren betonen aber eines der Charakteristika von graphentheoretischen Problemen, nämlich die leichte Verständlichkeit der Problematik und – dem entgegengesetzt – den hohen Schwierigkeitsgrad mancher Beweise: „Die Untersuchung der Farbenprobleme bietet den Schülern ein besonders reizvolles Betätigungsfeld. Der Lehrer sollte hier deutlich herausarbeiten lassen, daß zwischen scheinbar evidenten Aussagen und dem exakten Beweis derselben u. U. eine kaum überwindbare Diskrepanz bestehen kann, wie etwa beim Vierfarbenproblem.“ ([63], S. 52)

Ingo Weidig [85] erkennt 1972 eine Lücke zwischen der Behandlung topologischer Fragen in der geometrischen Propädeutik in der Grundschule und topologischen Inhalten der Oberstufe. Er schlägt in seinem Artikel „Das Studium von Netzen“ im Themenheft „Topologie II“ von *Der Mathematikunterricht* die Untersuchung von aus der geometrischen Propädeutik bekannten Netzen (heute würde man dazu „Graphen“ sagen) für die Klassen 7–10 vor. „Im Folgenden werden einige Möglichkeiten eines Studiums von Netzen dargestellt, wobei an die Darstellung von Relationen durch Pfeildiagramme (Graphen) angeknüpft wird. Nach Klärung der Grundbegriffe werden vorwiegend Anzahlfragen in Netzen und Optimierungsprobleme im Vordergrund stehen. Die Anzahlfragen bilden einen guten Hintergrund für kombinatorische Überlegungen und bereiten entsprechende später mit vollständiger Induktion zu lösende Probleme vor, die Optimierungsprobleme stellen zusammen mit dem linearen Optimieren die dringend notwendige Verbindung zu Problemen der ‚angewandten Mathematik‘ her. Das Studium von Netzen verbindet dabei in idealer Weise eine leicht zu handhabende Veranschaulichung mit dem Zwang, Lösungsstrategien zu entwickeln.“ ([85], S. 42)

Graphen werden als Hilfsmittel aus der Geometrie gesehen (der Artikel steht in einem Heft über Topologie): „Zur Veranschaulichung und häufig auch zur Beschreibung von Relationen bedienen wir uns eines geometrischen Hilfsmittels: Des (Relations-)Graphen.“ ([85], S. 43). Als inhaltliche Beispiele gibt Weidig elementare Eigenschaften von Graphen und die kürzeste-Wege-Problematik an. Weiter beschäftigt er sich mit Bäumen und ihren Eigenschaften und gibt als Anwendungsbeispiel das Telefonproblem, also die Planung eines günstigen Telefonnetzes, an. Zur Lösung schlägt er den Algorithmus von Kruskal vor.

Weidig stellt fest, dass die Themen für die weiterführende Schule geeignet sind, auch für die Hauptschule. „Sicher sind den vorgestellten Problemen zwei Eigenschaften zu-

zusprechen: Ihre Praxisnähe wird nur von wenigen anderen Unterrichtsgegenständen des Mathematikunterrichtes annähernd erreicht (vergleichbar sind vielleicht noch Flußdiagramme als Vorübung zum Programmieren oder Probleme zur Wahrscheinlichkeitsrechnung), zum anderen gibt es viel Raum für fruchtbare Eigentätigkeit der Schüler. [...] Sicher wird jedoch ein Beweisbedürfnis geweckt, was sich später im Geometrieunterricht als sehr fruchtbar erweisen kann. Schließlich sei noch der Zusammenhang zur Kombinatorik vermerkt, ein Bereich der Mathematik, der immer stärker in der Schule vordringt.“ ([85], S. 54–55)

In diesem Artikel erscheint die kombinatorische Optimierung also als ein Teilbereich der Topologie, der mit geometrischen Hilfsmitteln arbeitet und damit auch dem Geometrieunterricht zuarbeitet. Die Themen werden lediglich im Zusammenhang mit der Kombinatorik gesehen. Diese Einordnung findet man in den 70er Jahren häufig, sie war unter Umständen ein Hindernis für die breitere Umsetzung der Themen im Unterricht (s. u.).

Eine sehr ausführliche Auseinandersetzung mit dem methodisch-didaktischen Potenzial der Graphentheorie erfolgte 1974 in den beiden sich teilweise überschneidenden Artikeln *Graphentheorie im Mathematikunterricht?* [8] und *Über die mögliche Bedeutung der Graphentheorie beim Lernen von Mathematik* [9] von Hans-Günther Bigalke. Bigalke gibt drei mathematisch-inhaltliche Gründe zur Rechtfertigung der Aufnahme graphentheoretischer Elemente, Methoden und Fragestellungen in den Unterricht:

- die immense *Anwendungsfreudigkeit*,
- die große *Anschaulichkeit* und
- die weitgestreute *Problemfreudigkeit* auf jedem beliebigen Niveau.

Er erläutert diese drei Punkte so: „Die beiden erstgenannten Gründe sind in der Tat die wesentlichen Aspekte, die die Graphentheorie für viele Wissenschaften so interessant machen. [...] Will man endlich auch in der Schule Ernst machen mit der Forderung nach Anwendungen der Mathematik in anderen Wissensbereichen, so bietet sich die Graphentheorie dazu besonders an. Daneben ist aber der drittgenannte Grund der eigentlich relevante für das Lernen von Mathematik. Aufgrund der Problemfreudigkeit auf jedem beliebigen Niveau können Themenstellungen aus dem Bereich der Graphentheorie besonders die Aktivitäten beim Schüler fördern, durch die kreatives, kombinatorisches und argumentierendes Denken geschult wird.“ ([8], S. 5–6)

Quer zu den drei Inhaltsaspekten liegen laut Bigalke vier Bereiche, die die didaktische Bedeutung der Graphentheorie für den Mathematikunterricht hervorheben:

1. Modelle für Probleme, die eine algorithmische Lösung erfordern,
2. Lösung von Problemen mit Hilfe graphentheoretischer Sätze,

3. Veranschaulichung von (eventuell komplizierten) Zusammenhängen,
4. leichtverständliche Probleme mit beliebig hohem Schwierigkeitsgrad.

Er gibt Beispiele für die 4 Bereiche an: 1. Projektplanung (Berechnung eines „critical path"), 2. Biegen von Kantenmodellen von platonischen Körpern aus Draht (was auf ein chinesisches Postbotenproblem hinausläuft), 3. Veranschaulichung einiger Fakten aus dem Umkreis des Cantorschen Diskontinuums, 4. das Vierfarbenproblem, und bekräftigt noch einmal: „In der Tat liegt das gewaltige mathematikdidaktische Potential der Graphentheorie wohl in erster Linie in ihrer Problemfülle auf jedem beliebigen Niveau begründet." ([9], S. 191)

Die Frage „Graphentheorie im Unterricht?" wird mit einem klaren Ja beantwortet. Allerdings warnt Bigalke davor, im Zusammenhang mit dem Schulunterricht von Graphentheorie zu sprechen, um keine Proteste gegen eine zu starke Verwissenschaftlichung und Theoretisierung des Unterrichts ähnlich wie bei der Mengenlehre zu provozieren. Er betont nochmals, dass die Graphentheorie nicht als Fortsetzung der Strukturmathematik unterrichtet werden soll, sondern durch ihre Anschaulichkeit und Anwendungsfreudigkeit (auch und gerade außerhalb der Mathematik) eine Alternative dazu bietet (vgl. [9], S. 189), und appelliert schließlich ([8], S. 9): „Man sollte nicht so viel darüber sprechen, sondern mehr tun."

Dieser Begeisterung kann man sich kaum entziehen. Mit heutigen Augen betrachtet, fällt das Fehlen von unterrichtsmethodischen Hilfen und Hinweisen auf, was aber offensichtlich damals im Rahmen solcher Zeitschriftenartikel nicht unüblich war. Dennoch könnte es ein Grund für die zögerliche Umsetzung in die Praxis sein.

In den darauffolgenden Jahren erschienen mehrere Artikel über für den Unterricht geeignete graphentheoretische Themen. Es ist deutlich zu sehen, dass die Auswahl der Inhalte bezogen auf die Machbarkeit im Unterricht realistischer wird. Die mathematische Darstellung zeigt sich zunehmend weniger der Topologie oder Mengenlehre verpflichtet und wird dadurch wesentlich besser handhabbar. Anwendungen werden deutlicher hervorgehoben. Die kombinatorische Optimierung wird für den Unterricht entdeckt und es werden auch konkrete Algorithmen angegeben.

1975 erschien eine Abhandlung von Willi Maurer [61] in *Didaktik der Mathematik* über Turniergraphen und ihre Anwendungen. Auch dies ist wieder eine rein inhaltliche Darstellung, die mit den nötigen Definitionen beginnt und die Anwendungen erst nachreicht. Die Anwendungen sind interessant und schulgeeignet, eine ist das Katzenfutterexperiment, bei dem mit Hilfe von Graphen, die die Freßvorlieben von einzelnen Katzen darstellen, herausgefunden wurde, welches Futter das „Beste" sei.

Ein Artikel von 1976 über den Beweis des Satzes von Cayley über die Anzahl der aufspannenden Bäume in vollständigen Graphen von Jany Cajetan Binz [10] in *Praxis der Mathematik* stellt den Satz an den Anfang, zeigt dann den Weg zum Beweis, aufbereitet in Form von Aufgaben und Lösungen, so dass eine Umsetzung in Unterricht relativ einfach möglich ist. Als motivierendes Beispiel gibt er den Bau von Verbindungsstollen als Rettungswege in einem Bergwerk.

Der Beweis des Satzes von Cayley wird als Ausnahme hervorgehoben, die die Chance bietet, einen graphentheoretischen Beweis komplett mit Schülern durchzuarbeiten, denn: „In den meisten für den Unterricht geeigneten Fragestellungen dienen Graphen vor allem der Klärung von Zusammenhängen und den Modelldarstellungen realer Beziehungen [. . .]; nur selten wird man zur Behandlung tieferliegender Sätze vordringen können, da deren Beweise zu schwierig sind." ([10], S. 149)

Das Plädoyer für die Berücksichtigung der Graphentheorie im Unterricht fällt eher zurückhaltend aus. Offenbar wird die Gefahr einer zu theorielastigen Behandlung erkannt. Vielleicht ist die vorsichtige Formulierung und die Abgrenzung gegen einen axiomatisch orientierten Unterricht aber auch eine Reaktion auf bereits von Bigalke befürchtete Proteste (s. o. und vgl. [9], S. 189) gegen noch ein zusätzliches Gebiet damals eher ungeliebter „moderner Mathematik":

> „Der stürmische Fortschritt der kombinatorischen Mathematik in den letzten zwanzig Jahren und die wachsenden Bedürfnisse nichtmathematischer Disziplinen rechtfertigen es, eine behutsame Beschäftigung mit Graphen im Unterricht zu propagieren. Graphen sollten dann allerdings nicht als abstrakte Inzidenzgebilde, sondern als konkrete kombinatorisch-geometrische Figuren aufgefaßt werden." ([10], S. 149)

Eine pragmatische und dadurch im Vergleich zu manchem früheren Artikel stärker praxisrelevante Darstellung von Inhalten findet man in dem Artikel von 1977 aus *Der Mathematikunterricht* von Walter Vogel [82] über Optimierung von Netzwerken. Es werden drei klassische Themen der kombinatorischen Optimierung vorgestellt: Minimale aufspannende Bäume (anhand der Planung eines Leitungsnetzes zwischen Städten), kürzeste Wege (erst graphentheoretisch, dann Anwendungen, u. a. Projektplanung), maximale Flüsse (nur Andeutungen von Anwendungen). Für alle Problemstellung werden Algorithmen angegeben.

Die wenig formalisierte Darstellung begründet er so: „Das tiefere Verständnis für einen Algorithmus (für ein Rechenverfahren) setzt sehr gute Kenntnisse in der Theorie voraus. Man muß also zur Vorbereitung des eigentlichen Verfahrens einen großen Aufwand mit formalen Definitionen und Sätzen treiben. Auch bei graphentheoretischen Verfahren gilt, wie überall in der Mathematik: Über formale Definitionen und rein theoretische Sätze handelt etwa 99% der Literatur; praktisch anwendbare Verfahren findet man in höchstens 1% der Arbeiten. Um dieses Zahlenverhältnis günstiger zu gestalten, schlagen wir den folgenden Weg ein. Wir verzichten auf aufwendige Definitionen und Beweise, behandeln aber nur Graphen, welche noch eine übersichtliche Zeichnung erlauben. Daran erklären wir die auftretenden Begriffe und die Beweisideen. Die mit einem solchen Verfahren verbundenen Gefahren wollen wir bewußt in Kauf nehmen." ([82], S. 5)

Einen sehr reichhaltigen Text findet man in *Praxis der Mathematik* aus dem Jahr 1977 von Jürgen Floer [19]. Wie aus der Einleitung deutlich wird, geht es nun um einen wiederum „neuen" Mathematikunterricht, der Denk- und Handlungsmöglichkeiten in den Vordergrund stellt und offensichtlich eine (im Gegensatz zu noch 1974, vgl. das Bigalke-Zitat weiter oben) nun schon nicht mehr zu verteidigende Gegenbewegung zur Strukturmathematik ist.

> „Der folgende Beitrag soll einige Beispiele und Anregungen für Fragestellungen eines ‚neuen' Mathematikunterrichts geben, wobei nicht die neuen Inhalte das Entscheidende sind, sondern die neuen Möglichkeiten, sich mit ihnen auseinanderzusetzen." ([19], S. 1)

Floer beschreibt die große Anzahl und Variationsbreite der Anwendungen und dann weiter: „Solche Vielfalt läßt (richtig) vermuten, daß Graphen von der Didaktik nicht unentdeckt bleiben konnten. Entscheidend ist aber, daß sich mit ihrer Hilfe theoretische Überlegungen in Aussagen über Ecken, Kanten, Wege übersetzen lassen und damit ikonisch (z. T. sogar enaktiv) faßbar werden." ([19], S. 1) Er wird also sehr konkret in der Beschreibung der didaktischen Vorteile von Graphen. In wenigen Sätzen skizziert er die Charakteristik von Unterricht über kombinatorische Optimierung: „Im folgenden stehen jedoch nicht mathematische Sätze im Mittelpunkt, sondern die Möglichkeiten, von einfachen Fragen und Erfahrungen zu Mathematisierungen zu gelangen – und dies Schritt für Schritt und in leicht durchschaubarer Weise. Dabei eröffnen sich im Unterricht zahlreiche Wege zu anwendungs- und problemorientierter Arbeit, zum Denken in Zusammenhängen, zu argumentierendem und kreativem Verhalten. Dazu sind solche Optimierungsprozesse nicht nur praktisch relevant, sondern kennzeichnen eine Form intellektueller Auseinandersetzung mit der Umwelt." ([19], S. 2)

Nicht nur formalisierbares mathematisches Lernen ist in diesem Themenkreis möglich, sondern Erfahrungen im Rahmen des Modellierungsprozesses. „Schon die Tatsache, daß verschiedene Umweltsituationen zum gleichen mathematischen Problem führen, bzw. sich hinter ihm verbergen können, dazu die Diskussion, daß kürzeste Wege nicht immer die schnellsten, schnellste nicht immer die billigsten usw. sind, ist didaktisch von Bedeutung." ([19], S. 2) Er macht auch den Vorschlag der enaktiven Problemlösung mittels eines Fadenmodells. Er betont, dass die Probleme intuitiv angegangen werden können und sich dabei fast zwangsläufig eine Fülle von Fragen ergibt. Er hebt zusätzlich die Vielfalt der Lösungswege hervor. Dann gibt er Verfahren bzw. Algorithmen an, betont aber, dass sie nicht zu früh im Unterricht angeboten werden sollen. „Die im folgenden geschilderten Verfahren zum sicheren Auffinden des kürzesten Weges sollten nicht zu früh angeboten werden. Von besonderer didaktischer Bedeutung ist, daß man über weite Strecken auch ohne sie auskommt. Zum einen nämlich lassen sich viele der relevanten Lernziele auch auf intuitivem, noch wenig formalisiertem Niveau erreichen (damit auch von den Schülern, die über dieses nicht oder nur schwer hinauskommen). Zum anderen wird durch diese Aktivitäten die Algorithmisierung vorbereitet. Nicht nur das Endresultat ist wichtig, entscheidend ist vielmehr der Prozeß, der zu seiner Gewinnung führt." ([19], S. 3)

Er vergleicht zwei Verfahren zur Konstruktion kürzester Wege an und stellt fest, dass beide das gleiche Ergebnis liefern, aber über verschiedene Zwischenschritte ablaufen, und gibt auch methodische Hilfen: „Dies wird sehr deutlich, wenn der Lösungsweg in einer farbigen Bildfolge festgehalten wird.“ ([19], S. 5) Neben kürzesten Wegen werden maximale Flüsse behandelt und dabei vor allem das Max-Flow-Min-Cut-Theorem hervorgehoben.

„Nur eins soll noch betont werden, daß natürlich nicht an eine kompakte Unterrichtseinheit Graphen und Netze gedacht ist, sondern an die fruchtbare Verbindung mit möglichst vielen anderen Fragen. Dies kann für einfache Weg- und Transportnetze beginnen bei Übungen zur Addition und Subtraktion in den ersten Schuljahren ([Fußnote:] Dabei kann man ein Wegenetz sogar als Spielplan benutzen, auf dem statt Längen eine entsprechende Anzahl von Stationen auf den Kanten angegeben sind. Es wird gewürfelt, jeder darf so viele Stationen weiterrücken, wie Augen geworfen sind. Wer kommt als erster ins Ziel?), fortgesetzt werden mit stärkerer Betonung der algorithmischen Aspekte in den folgenden Klassen und sich erstrecken bis hin zur Erarbeitung der Beweise und zur Verbindung mit linearer Optimierung [...] in einem Kurs der Sekundarstufe II.“ ([19], S. 44) Hier sieht man deutlich, dass es zu diesem Zeitpunkt nicht in Frage kam, diesen Themen eigene Unterrichtseinheiten zu widmen. Dennoch spannt Floer das ganze Spektrum der Möglichkeiten unterrichtlicher Umsetzung auf.

Er beschreibt die fächerübergreifenden Möglichkeiten und betont dann nochmals: „An allen diesen Stellen geht es natürlich nicht darum, daß der Schüler einige Sätze der angewandten Mathematik lernt, sondern daß er erfährt, wie Mathematik bei der Lösung von Problemen eingesetzt werden kann.“ ([19], S. 44) (Dieses Zitat erinnert stark an Freudenthal ([22], S. 76): „Ich möchte, daß der Schüler nicht angewandte Mathematik lernt, sondern lernt, wie man Mathematik anwendet.“)

Das dritte Heft von *Der Mathematikunterricht* zur Graphentheorie [69] erschien 1978. In der Einführung zu diesem Heft von Karl-Dieter Klose lesen wir:

> „Graphentheoretische Fragestellungen haben seit einigen Jahren Eingang in die neuere Schulbuchliteratur gefunden. Im Zuge der Modernisierung des Mathematikunterrichts konnte die Mathematikdidaktik nicht achtlos an einer Reihe von Themenkreisen vorübergehen, die sich durch Anwendungsbezogenheit einerseits, durch die Verbindung interessanter Problemstellungen und anschaulicher Arbeitsweisen andererseits auszeichnen. Insbesondere Grundschulbücher wiesen eine Fülle von Aufgaben aus der sogenannten Unterhaltungsmathematik auf – zum Unbehagen einiger Lehrer, zur Freude vieler Schüler; die Lehrpläne gaben ihren Segen dazu.
>
> Die letzten zwei, drei Jahre verstärkten diese Tendenz nicht. Lehr- und Bildungspläne für den Bereich der Grundschule reduzieren zwar erfreulicherweise den Umfang des zu lernenden mathematischen Begriffsapparates, geben nichtklassichen Unterrichtsinhalten aber gleichzeitig nur noch wenig Raum.“ ([69], S. 3)

Als einen Grund für diesen Sachverhalt sieht Klose das Fehlen von Konzepten zur Weiterführung der Themen in die Sekundarstufe I. Mehr als dieselben Fragestellungen mit komplizierteren Graphen sei in den meisten Schulbüchern nicht zu finden. Das MU-Heft soll Anregungen für den Unterricht über Graphentheorie in den Sekundarstufen geben. Die Themen des Hefts sind: Hamiltonsche Linien; Graphen und Ordnungen; Netze und Landkarten; Planare Graphen.

In seinem inhaltsreichen Artikel über Netze und Landkarten betont Karl-Dieter Klose [46] ähnlich wie Floer (s. o.), dass es nicht nur auf den Stoff ankomme, sondern insbesondere auf die bei den Schülern ausgelösten Aktivitäten.

> „Eine Grundtendenz der gegenwärtigen Diskussion didaktischer Fragestellungen im Zusammenhang mit einer Reform des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I scheint es zu sein, keine allgemeinen Konzepte anzubieten. Vielmehr wird versucht, bereits bekannte Unterrichtsinhalte in neuer Form didaktisch aufzubereiten oder Möglichkeiten aufzuzeigen, neue Themenkreise sinnvoll in den seitherigen Stoffkanon einzubauen. Es wird infolgedessen darauf zu achten sein, nicht grundsätzlich all das zu übernehmen, was prinzipiell lehrbar ist. Mathematikunterricht erhält seine Begründung nicht allein aus den Stoffinhalten, die er berührt; ausgelöste Eigenaktivitäten der Schüler stellen sicher ein brauchbares Auswahlkriterium dar. Unter diesem Aspekt sollen die Vorschläge dieses Aufsatzes angesehen werden: als mögliche, dem Alter der Schüler angemessene Fragestellungen, nicht aber als Empfehlungen für einen verbindlichen Stoffkanon.“ ([46], S. 53)

Zudem nimmt er nochmals Bezug darauf, dass Graphentheorie häufig mit Unterhaltungsmathematik gleichgesetzt wird. Er verweist ganz pragmatisch auf den motivatorischen Vorteil und zeigt auf, dass ausgehend von solchen Aufgabenstellungen mathematisch in die Tiefe gegangen werden kann. „Dabei wird sich zeigen, daß bekannte Probleme der sogenannten ‚Unterhaltungsmathematik‘ in einem allgemeineren Rahmen behandelt werden können. Fragestellungen dieser Art als zu ‚unwissenschaftlich‘ abzulehnen, scheint wenig verständlich: lieber ein Lehrer, der seine Schüler unterhält, als einer, der sie langweilt, wozu der Mathematikunterricht ja hinreichend Gelegenheit bietet!“ ([46], S. 53)

Ein kleiner, der Thematik der optimalen Wege gewidmeter Artikel von Peter Baptist [6] in *Praxis der Mathematik* von 1979 zeigt ein Lösungsverfahren, das zunächst direkt am Graphen erklärt wird, und das dann, mit dem Hinweis auf die Anwendungspraxis, so modifiziert wird, dass es direkt auf die zugehörige Entfernungsmatrix angewandt werden kann. Der Artikel beschreibt bewusst nur die Inhalte, soll als Anregung zur Behandlung im Unterricht (Empfehlung ab Klasse 9) verstanden werden. Interessant ist der folgende Kommentar, der zweierlei zeigt. Zum einen das Bewusstsein, dass Anwendungen im Mathematikunterricht oft viel zu schnell hinter zu schwieriger Mathematik verschwinden, und zum anderen die dem Stoff innewohnende Möglichkeit, die Begriffe handelnd zu erschließen. „Um das vorhandene

Interesse vieler Schüler an der Angewandten Mathematik zu erhalten, aber auch, um die Schüler nicht mit Theorie zu überfordern, empfiehlt es sich, von konkreten Beispielen auszugehen und daran schrittweise die zur Lösung des Problems notwendigen Begriffe und Sachverhalte zu erläutern.“ ([6], S. 99) Dieser kleine, fast unscheinbare Artikel markiert innerhalb der hier untersuchten Thematik einen Wendepunkt hin zur Verbindung von mathematischen Themen mit informatischem Denken (und damit auch naturgemäß einem eher prozessorientierten Denken).

Es ist den Quellen deutlich anzumerken, dass die 70er Jahre eine grundlegende Neuorientierung der Mathematikdidaktik mit sich brachten. Während in den frühen Artikeln zum Teil noch der bourbakistische Geist zu spüren ist, lässt die logizistische Betrachtungsweise immer mehr nach und macht Platz für Unterrichtsvorschläge, die sich stärker an entdeckende, problemorientierte oder genetische Konzepte anlehnen. Bereits 1978 konnte festgestellt werden, dass unter Mathematikdidaktikern eine deutliche Einigkeit darüber bestehe, „daß der stark logizistisch orientierte Ansatz, der in den Rahmenrichtlinien von 1968 zum Ausdruck kommt, eine Fehlentwicklung war.“ ([11], S. 250)

Bevor wir unseren Blick auf die 80er und 90er Jahre werfen, wird im nächsten Absatz ein Artikel von Heinrich Winter vorgestellt, der aus verschiedenen Gründen „außer Konkurrenz“ in dieser Studie berücksichtigt wird.

2.2 Der Ansatz von Heinrich Winter (1971)

An eher unvermutetem Ort findet man bereits 1971 einen Reichtum von Ideen und konkreten Vorschlägen für die Schule. Der Artikel „Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule“ von Heinrich Winter [87] schlägt Graphentheorie und kombinatorische Optimierung für den neu zu etablierenden Geometrieunterricht in der Grundschule vor.

Zur Begründung für Geometrieunterricht in der Grundschule betont er den engen Zusammenhang von Raum und Geist ([87], S. 49): „Wer denkt, der *geht* geistige *Wege*, handelt im Raum, wirklich oder in der Vorstellung.“ Weiter betont er die Aufgabe des Geometrieunterrichts, die Umwelt erschließen zu helfen, das Erfassen von Formen und deren räumlichen Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten. Weitere Aufgaben sind die Entfaltung der Größenbereiche und die Pflege und Weiterentwicklung der Kreativität.

„Die Bemühungen zur Erhaltung und Steigerung der Kreativität, zu denen es sicher keinen Erfolgsalgorithmus geben kann, sind an sich an keinen bestimmten Stoff gebunden. Jede Gelegenheit sollte wahrgenommen werden, die Schüler zum Entdecken, Finden und Erfinden zu veranlassen. Geometrische Fragestellungen scheinen sich jedoch in besonderer Weise zu eignen, weil sich einmal Problemstellungen geradezu von selbst aufdrängen, zweitens Lösungen sich letztlich experimentell verfolgen lassen und schließlich in der Regel nur geringes Vorwissen vorausgesetzt werden muß.“ ([87], S. 49) Darüber hinaus fordert er von diesem Unterricht eine Problem- und Handlungsorientierung.

Unter dem Stichwort „Spiele und konkretes Material“ zeigt er die Bedeutung entdeckenden und selber handelnden Lernens auf: „Die Schüler sollten die Chance erhalten, räumliche Konfigurationen nach mehr oder weniger engen Spielregeln herzustellen, zu variieren, weiterzuspielen. Sie sollten ermutigt werden, neue Spielregeln zu erfinden, neue Regeln abzuleiten usf. Dazu benötigt man Material, und zwar für die Hand jedes einzelnen Kindes [...]. Warum genügen nicht die wirklichen Dinge der Umwelt, die man doch auch sieht? Das strukturierbare Material in der Hand der Schüler vereinfacht die umweltlichen Situationen, erlaubt schier unbegrenzte Variationen, die praktisch durchgeführt werden können, und erleichtert damit auch das Hinausschreiten über das Praktische. Nicht Betrachten, sondern Handeln evoziert Denken. Eine betrachtete Figur ist nur für denjenigen ausbeutungsfähig, der vorher passende Handlungen selbst durchgespielt hat.“ ([87], S. 51)

Als letzten didaktischen Gesichtspunkt nennt er das Überschreiten der praktischen Erfahrung. „Handlungen bleiben stumm, wenn sie nicht strukturiert, überhöht, ins ‚Innere‘ fortgesetzt werden.“ (S. 51) Diese Überschreitung der praktischen Erfahrung geschieht durch das Nachdenken über Fragen wie „Ist das immer so?“ „Was wird geschehen, wenn wir...?“. „Die Notwendigkeit zu Festsetzungen (Axiomen) ergibt sich erst dann, wenn die Empirie am Ende ist. Das heißt aber, daß man das empirisch-experimentelle Stadium erst durchlaufen muß. Das heißt aber nicht, daß man jahrelang nur empirisch arbeitet, dann sozusagen einen Schlußstrich zieht und axiomatisch neu beginnt.“ ([87], S. 52)

Mit diesen Vorüberlegungen, die umfassende Ziele für den Mathematikunterricht im Allgemeinen aufspannen, bereitet er eine Sammlung von Aufgabenbeispielen vor.

Die Beispiele für geometrisches Arbeiten in der Grundschule sind dann eine Überraschung: Gebiete (u. a. Gebiete aus geschlossenen Linien und Zweifärbbarkeit, Pflasterungen, Färben), Netze (u. a. Wege, Isomorphie, Eulergraphen und -wege, Anzahl der ungeraden Knoten, Hamiltonkreise, Bäume, gerichtete Graphen). Alles mit zum Entdecken anregenden Fragen.

Der Artikel von Heinrich Winter ist in verschiedener Hinsicht interessant. Im Gegensatz zu allen anderen Artikeln aus den 70er Jahren nimmt Winter Graphentheorie und kombinatorische Optimierung ganz ungeniert als Themenfeld zur kreativen Auseinandersetzung mit Mathematik. Er verzichtet in diesem Aufsatz auf strenge mathematische Definitionen und Sätze und formuliert stattdessen kleine Aufgabenstellungen, die spielerisch und handelnd an die zentralen Fragestellungen heranführen, wie etwa diese: „Versuche ein Netz zu zeichnen, das *eine* (und nicht mehr) ungerade Ecke hat.“ ([87], S. 61). Er arbeitet in seinen Aufgabenstellungen auch algorithmische Aspekte heraus, breitet auf wenigen Seiten kondensiert den ganzen Themenkanon aus.

Weiter unterscheidet sich seine Herangehensweise von der der anderen Autoren dieser Zeit dadurch, dass er sowohl konkret unterrichtspraktische Hilfen gibt, als auch sich klar zu Methodik äußert, die diesem Stoff eigentlich schon innewohnt: problemorientiertes, entdeckendes, kreativ-forschendes Arbeiten. Vermutlich liegt dieser Unterschied darin begründet, dass Winter über Unterricht in der Grundschule schreibt. In diesem Bereich begann man schon viel früher als in der Gymnasialdidaktik weniger wissenschaftsorientiert und dafür verstärkt methodenorientiert zu arbeiten.

Der Artikel weist weit über die 70er Jahre hinaus. Es gibt durchaus einige Autoren, die auf diesen Artikel verweisen (z. B. [8]). Es wurde jedoch anscheinend nie ernsthaft in Erwägung gezogen, dieses Konzept in die höheren Schulstufen zu transferieren. Vermutlich passte die spielerisch-experimentelle Herangehensweise nicht in die damals aktuelle Gymnasialdidaktik. Hätte Winter über Gymnasialunterricht zu denselben Themen geschrieben, wäre die heutige Ausgangslage unter Umständen eine andere.

2.3 Die 1980er und 1990er Jahre

Die Einordnung von Graphentheorie und kombinatorischer Optimierung verschiebt sich in den folgenden Jahrzehnten noch weiter. Man findet die entsprechenden Artikel nicht mehr unter „Topologie“ oder „Graphentheorie“, sondern in Themenheften mit den Titeln „Extremwertprobleme“, „Optimieren“, „Kombinatorik“ oder „Folgen“. Das zeigt, dass die Thematik nun viel stärker an ihren Anwendungsaspekt angebunden wird und damit nochmals deutlich attraktiver für Unterricht sein kann.

Nachdem schon Ende der 70er Jahre erste Vorschläge zur Behandlung von Graphenalgorithmen aufgetaucht sind, werden sie nun zum festen Bestandteil der meisten Unterrichtsvorschläge. Auch Laufzeitbetrachtungen kommen ins Spiel, so dass sich die technische und fachliche Entwicklung auch in der Unterrichtsentwicklung niederschlägt.

Schon der Titel des Artikels „Das Problem der verschneiten Straßen – minimale Gerüste“ von Kießwetter und Rosenkranz [43] in *Der Mathematikunterricht* von 1982 zeigt in aller Deutlichkeit, dass von der Anwendung ausgehend Mathematik erarbeitet werden soll. Der Artikel enthält die Beschreibung einer Unterrichtseinheit, die auf verschiedenen Schulstufen und Niveaus durchgeführt wurde. Zu Beginn machen die Autoren die Feststellung, dass graphentheoretische Probleme sich in der Schule zunehmender Beliebtheit erfreuen. Als Gründe werden angegeben:

1. Mathematisierbarkeit
   („Durch die Anwendungen auf neuartige Praxisfelder kann die Leistungsfähigkeit der Mathematik im Erfahrungsbereich der Schüler in einem Umfang gezeigt werden, der sonst im Mathematikunterricht kaum möglich ist.“ ([43], S. 5)),

2. Algorithmisierbarkeit,

3. leichte Zugänglichkeit
   (wenig Vorkenntnisse, eingängige Darstellungen, die „im Vollzuge des Seh-Aktes bereits strukturiert werden" ([43], S. 6)),
4. Initiieren problemlösenden Verhaltens
   (Anregung der Kreativität durch die Möglichkeit „gleichzeitig auf ‚quasienaktiven', ikonischen und symbolischen Ebenen arbeiten zu können" ([43], S. 6)).

Der letzte Punkt, bei Bigalke z. B. unter „Anschaulichkeit" zu finden, wird hier zum ersten Mal so prägnant formuliert. Dies zeigt, dass der Fokus sich seit der Überbetonung der Axiomatik in den vorhergehenden Jahren zunehmend mehr auf Schülertätigkeiten und Lern- und Erkenntnisprozesse richtet. Es wird dafür plädiert, keine Fachbegriffe vorzugeben, da sie den Anschauungszusammenhang verfremden können und das Problemlöseverhalten abschwächen. Vom Lehrer festgelegte Begriffe können suggerieren, dass nicht eigene Kreativität erwartet wird, sondern das Nachvollziehen eines vom Lehrer von vornherein festgelegten (Lern-)Weges.

Viele Erfahrungen aus dem durchgeführten Unterricht fließen in den Artikel ein. Die Autoren schlagen zur Vertiefung des Verständnisses für Konstruktionsalgorithmen für minimale Gerüste (das sind minimale aufspannende Bäume) ein Spiel vor, in dem die eine Gruppe versucht, einen solchen Baum zu bauen und die andere versucht, dies zu verhindern. Dadurch wird die Konstruktionsstrategie von zwei Seiten beleuchtet und klarer sichtbar.

Computereinsatz wird als selbstverständlich vorausgesetzt (zu diesem Zeitpunkt gab es ja bereits Computer an den Schulen) und die Vorstellung davon als methodisches Hilfsmittel eingesetzt. „Oft sind bereits Ansätze zu effektiven Algorithmen vorhanden, die allerdings nur auf der Handlungsebene verfügbar sind. In diesem Fall bringt – neben der Diskussion unter den Schülern – der Auftrag eine wesentliche Hilfe, die Verfahren so genau zu beschreiben, daß sie vom Computer durchgeführt werden können." ([43], S. 3) „Es geht darum, die Verfahren so eindeutig zu formulieren, daß ohne größeren Aufwand ein Programm geschrieben werden kann." ([43], S. 14) Die Autoren geben Basic-Programme für die von ihnen vorgeschlagenen Algorithmen an. Die Verbindung von Mathematik und Informatik erscheint hier als ganz selbstverständlich (obwohl sie es bis heute in der Unterrichtspraxis nicht ist). Ein für Schüler verständlicher Korrektheitsbeweis, den die Autoren eigens für den Unterricht erarbeitet haben, rundet den Artikel ab.

Auch noch 1983 wird konstatiert, dass es an Unterrichtserfahrungen über Kombinatorik (der man die kombinatorische Optimierung auch zurechnen kann) fehle. Liegt es evtl. daran, dass die Graphentheorie in den 70er Jahren in ganz anderen mathematischen Fachgebieten angesiedelt wurde und daher die zum Teil sehr reichhaltigen Vorschläge hier nicht wahrgenommen wurden?

> „Im Gegensatz zu etablierten Unterrichtsthemen der Sekundarstufe II, wie etwa der Analysis, aber auch der Stochastik, gibt es in der Kombinatorik als eigenständigem Unterrichtsgegenstand keine Lehrtradition. Daher erscheinen uns Versuche, die über erste Vorschläge wesentlich hinausgehen oder gar bis zu einer didaktischen Analyse reichen, verfrüht.“ (Danckwerts/Deuber/Vogel [16], S. 14–15)

Diese Sätze stehen in der Einführung zu einem Themenheft „Kombinatorik“ der Zeitschrift *Der Mathematikunterricht* von 1983. In diesem Heft werden verschiedene Aspekte der Kombinatorik ausführlich beleuchtet und insbesondere auch der algorithmische Aspekt hervorgehoben (Bovermann/Danckwerts/Vogel [12]). Dort werden auch einige Beispiele aus der kombinatorischen Optimierung vorgestellt, inklusive Algorithmen, Korrektheitsbeweisen und Laufzeitabschätzungen. Die Herausgeber verbinden mit dem Erscheinen des Hefts große Hoffnungen bezüglich der Durchschlags- und Überzeugungskraft der Themen und üben dabei eine leise Kritik an traditionsverhafteten Curricula: „Wir wünschen uns, daß dieses Heft – über Anregungen hinaus – manches allzu Selbstverständliche im Stoffkanon des Gymnasiums in Bedrängnis bringt.“ (Danckwerts/Deuber/Vogel [16], S. 15)

Nach den uns zugänglichen Quellen zu schließen wurde es in den darauffolgenden Jahren sehr ruhig um die diskrete Mathematik in der Schule.

Ein kleiner Artikel von Nigel Green [26] zur Graphentheorie erschien 1997 in *Mathematik lehren*, der allerdings die konkrete Anbindung an Anwendungssituationen vermissen lässt und nur einen kleinen Ausblick in das britische Curriculum geben soll. Diskrete Mathematik ist in der Oberstufe fester Bestandteil der britischen Lehrpläne. Dabei wird auch die kombinatorische Optimierung berücksichtigt. Green gibt Beispiele aus der Unterrichtspraxis, sogar mit Arbeitsmaterialien, bleibt aber (vermutlich auch aus Platzmangel) ganz auf der graphentheoretischen Ebene. Die „Anwendungsbeispiele“ sind sehr stark verkürzt und didaktisch zurechtgestutzt. Kürzeste Wege, Minimale aufspannende Bäume, das Problem des Handelsreisenden und das chinesische Postbotenproblem werden an ein und demselben Graphen erforscht. Dadurch wird nicht genug deutlich, wie sehr das Fachgebiet aus der Anwendung schöpft und somit bleibt das didaktische Potenzial eher verborgen.

Ebenfalls 1997 in *Mathematik lehren* im Themenheft „Optimieren“ erschien ein Artikel von Jäger und Schupp [41] über das Problem des Handlungsreisenden. Die Problemstellung entfaltet sich anhand der Geschichte eines Textilvertreters, der zunehmend mehr Städte besuchen muss. Seine Tochter hilft ihm dabei, gute Rundreisen zu finden. Sie bemerken, dass der Computer schon bei nicht allzuvielen Städten recht lange braucht, und entwickeln verschiedene Heuristiken. Laufzeitbetrachtungen werden mit einbezogen, Nächster-Nachbar und verschiedene Verbesserungsheuristiken vorgestellt. Die Praxisrelevanz wird in ein paar Beispielen erwähnt, der Unterrichtsvorschlag bleibt aber bei dem Beispiel des Handlungsreisenden aus der Geschichte.

In einem ganz anderen Kontext findet sich 1999 noch ein Artikel zu minimalen aufspannenden Bäumen von Günter Malle [59]. Gesucht wird ein möglichst kurzes Wegenetz zwischen sechs Forschungsstationen. Er lässt erst mit kleinen Graphen experimentieren und spricht dann das Zeitproblem bei enumerativen Verfahren an. Dann erklärt er den Algorithmus von Kruskal und beweist dessen Korrektheit mit einem Widerspruchsbeweis. Er interpretiert den Algorithmus als Konstruktionsvorschrift für eine Folge von Objekten, die dem gesuchten Ergebnis immer näher kommen.

2.4 Jüngste Entwicklung und Ausblick

Seit Beginn des neuen Jahrtausends hat sich das Blatt gewendet. Schon nach der TIMS-Studie und spätestens nach dem Bekanntwerden der Ergebnisse der ersten PISA-Studie wurde (wieder einmal) in Deutschland der Ruf nach einer Neuorientierung des Mathematikunterrichts lauter. Die Zielsetzung des Mathematikunterrichts veränderte sich (siehe auch Kapitel 1) und das Interesse an neuen Themen, die zur Verwirklichung dieser Ziele beitragen können, wuchs. Die von den neuen „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“ ([75]) geforderte Kompetenzorientierung des Mathematikunterrichts eröffnet den Weg für neue, eben diese Kompetenzen fördernde Themen. Die kombinatorische Optimierung zeichnet sich durch eine ideale Kombination von didaktischen Eigenschaften aus (siehe Kapitel 5) und rückt dadurch erneut und nachdrücklicher als zuvor in den Blickwinkel der Schulmathematik.

Für den neuen „Boom“ der diskreten Mathematik und speziell der kombinatorischen Optimierung war nicht nur die politische Entwicklung verantwortlich, sondern auch die rasante Weiterentwicklung des Fachgebietes und seiner Anwendungen. Der heutige riesige Fundus an interessanten und alltagsrelevanten Anwendungen stand beim ersten Aufkommen der Graphentheorie für den Unterricht noch nicht zur Verfügung. Er verhilft den heutigen Bestrebungen, kombinatorische Optimierung in die Schule zu bringen, zu vermehrter Beachtung.

In den USA ist die diskrete Mathematik schon viel stärker als in Deutschland in den Curricula verankert. Ursache dafür ist, dass in den NCTM-Standards von 1989 diskrete Mathematik als eigener Standard vertreten ist. In den NCTM-Standards von 2000 gibt es diesen eigenen Standard nicht mehr, aber dennoch ein klares Votum für diskrete Schulmathematik (NCTM 2000, S. 31, zit. nach [14], S. 7):

> „Als ein lebendiger Zweig gegenwärtiger Mathematik, der vielfach in Wirtschaft und Industrie benutzt wird, sollte diskrete Mathematik ein zentraler Teil der Schulmathematik sein.“

Diese Haltung gegenüber der diskreten Mathematik schlägt sich in vielen US-amerikanischen Curricula nieder und hat auch in Deutschland Aufmerksamkeit geweckt (z. B. durch die Bücher „Discrete Mathematics in the schools“ [67] und „Discrete

Mathematics across the Curriculum“ [42]). Eine mit unserem Ansatz vergleichbare Herangehensweise, kombinatorische Optimierung problem- und anwendungsorientiert und unter Betonung der algorithmischen Seite in den Unterricht zu bringen, findet sich dort allerdings unter den uns zugänglichen Materialien derzeit nicht. Insgesamt ist der konkrete Einfluss der US-amerikanischen Konzepte auf deutsche Curricula trotz der Einführung von nach amerikanischem Vorbild entwickelten bundesdeutschen Bildungsstandards sehr gering.

Der in den letzten Jahren durch das Matheon[6] -Projekt „Diskrete Mathematik für die Schule“ (gefördert von der Volkswagenstiftung, Prof. Dr. Martin Grötschel, Brigitte Lutz-Westphal) bundesweit propagierte Vorschlag, kombinatorische Optimierung in der Schule zu unterrichten, stößt auf breites Interesse in der Lehrerschaft. Allerdings ist die Verankerung in den Lehrplänen eine wichtige Voraussetzung für eine dauerhafte Umsetzung im Unterrichtsalltag. Momentan werden an vielen Orten kleine Unterrichtsprojekte zur kombinatorischen Optimierung durchgeführt, was jedoch immer vom überdurchschnittlichen Engagement einzelner Lehrkräfte abhängt und somit noch keine langfristige Etablierung der Themen im Unterricht gewährleistet.

In Berlin und Hamburg ist die Aufnahme in Wahl- bzw. sogar Wahlpflichtbereiche der Lehrpläne gelungen (Sekundarstufe I Berlin [76], gym. Oberstufe Hamburg [21], 8-jähriges Gymnasium Hamburg [20]), so dass die kommenden Jahre zeigen werden, wie groß die Akzeptanz und das Umsetzungsvermögen seitens der Lehrerschaft sind. Die Neugestaltung der Lehrpläne aller Bundesländer nach dem Inkrafttreten der bundesweit verbindlichen Bildungsstandards [75] ist noch nicht abgeschlossen, so dass eine endgültige bundesweite Bestandsaufnahme zum jetzigen Zeitpunkt (Mai 2006) noch nicht gemacht werden kann.

Da diskrete Mathematik in der Ausbildung von Mathematik-Lehramtsstudierenden nach wie vor eine untergeordnete Rolle spielt, bedarf es auch in Zukunft noch eines größeren Einsatzes, um die Themen unter Lehrern bekannt zu machen und Hilfen bei der Unterrichtsvorbereitung und -planung zu geben. Die beiden Projekte des Berliner DFG-Forschungszentrums Matheon „Diskrete Mathematik für die Schule“ und “Visualisierung von Algorithmen“ (Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp, Anne Geschke, Brigitte Lutz-Westphal, Dirk Materlik) arbeiten in Berlin, aber auch im Bundesgebiet intensiv an dieser Aufgabe. Im Rahmen des zweiten Projektes wurde auf der Basis einer dynamischen Geometriesoftware Unterrichtssoftware zur kombinatorischen Optimierung entwickelt. Verschiedene Projekte im Rahmen der Lehrerausbildung gab und gibt es u. a. an den Pädagogischen Hochschulen in Freiburg und Karlsruhe und an der Universität Dortmund (Prof. Dr. Stephan Hußmann und Prof. Dr. Timo Leuders).

Ein Vorurteil von einigen Lehrern gegenüber kombinatorischer Optimierung, dem man immer wieder begegnet, ist der Glaube, dass es sich dabei um Informatik handelt. Viele der Lehrer, die Graphentheorie und ihre Anwendungen unterrichten, sind auch Informatiklehrer. Sie kennen und schätzen die algorithmische Seite der diskre-

[6] DFG-Forschungszentrum Matheon „Mathematik für Schlüsseltechnologien“, Berlin

ten Mathematik und fühlen sich im Umgang mit einfachen Graphenalgorithmen wie Breitensuche, Tiefensuche oder Algorithmus von Dijkstra sicher. Genau aus demselben Grund aber lehnen einige von ihnen die Behandlung dieser Themen im Mathematikunterricht ab, weil sie dabei vor allem an Algorithmen und den Gebrauch von Programmiersprachen denken und die Thematik nicht dem Mathematikunterricht zuordnen. Hier werden die neuen Unterrichtsmaterialien helfen können, die aufzeigen, wieviel Mathematik mit den Themen betrieben werden kann.

Zur Unterstützung der unterrichtlichen Umsetzung gibt es einige Veröffentlichungen aus den letzten Jahren. Im Jahr 2001 erschien „Das Geheimnis des kürzesten Weges“, ein Sachbuch für Jugendliche von Peter Gritzmann und René Brandenberg [27]. Es richtet sich an Jugendliche ab etwa 15 Jahren und behandelt einen ähnlichen Themenkanon wie unser Projekt. Mit dem Erscheinen des Buches wurde ein Popularitätsschub für die kombinatorische Optimierung ausgelöst, auch unter Lehrern, da das Buch dem Vernehmen nach hauptsächlich von Erwachsenen gelesen wird. Es werden die Inhalte in verständlicher Form dargelegt und Anwendungen gezeigt, aber – entsprechend der Zielgruppe – keine Hinweise zum Unterricht über die Themen gegeben. Dennoch eignet es sich gut als Inhalts- und Materialsammlung für die Unterrichtsvorbereitung. Unter der Leitung von Prof. Dr. Peter Gritzmann führt die TU München Lehrerfortbildungen zur kombinatorischen Optimierung durch.

Das u. a. aus dem Projekt „Diskrete Mathematik für die Schule“ hervorgegangene Buch „Kombinatorische Optimierung erleben“ [38], das 2006 erscheint, versucht diese Lücke zu füllen. Es versteht sich in erster Linie als Lehrbuch für Lehrerinnen und Lehrer und nimmt eine auf aktiver Mitarbeit der Leserschaft beruhende unterrichtspraktische Perspektive ein. Mehr dazu in Kapitel 8.

Aus dem Bonner Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik gibt es eine für den Unterricht sehr gut geeignete CD-ROM „Arithmeum“ [1], die zu den klassischen Themen der kombinatorischen Optimierung allgemeinverständliche Einführungen und Anwendungsbeispiele gibt.

Bereits vor dem Start unseres Projektes bearbeitete Andreas Schuster (Würzburg) Themen der kombinatorischen Optimierung für den Unterricht. Er führte Unterrichtsversuche mit Projektarbeit zu verschiedenen Wegeproblemen durch und wertete die Videoaufzeichnungen im Rahmen seiner Habilitation (2004) [74] aus. Die Doktorarbeit von Hilde Kletzl (2002) [45] gibt einen Überblick über österreichische Curricula und das Vorkommen von (eher informatisch orientierten) Unterrichtseinheiten zu Daten- und Beziehungsstrukturen.

Einige Berliner Wissenschaftler sprachen sich 2003 in den „Berliner Thesen zum Mathematikunterricht“ [4] u. a. für die Einführung von Kombinatorik und kombinatorischer Optimierung in die Lehrpläne aus. Es folgten weitere Artikel der Autorin über Konzepte und Erfahrungen mit kombinatorischer Optimierung in der Schule ([50], [51], [52], [54], mit Geschke, Kortenkamp, Materlik: [24]).

Im April 2005 erschien ein Heft von *Mathematik lehren* über Diskrete Mathematik mit Artikeln über minimale aufspannende Bäume (Gritzmann/Brandenberg [13]) und über das kürzeste-Wege-Problem (Lutz-Westphal [53]). Regina Bruder und Hans-Georg Weigand zeigen im Basisartikel auf, dass die diskrete Mathematik unter verschiedenen Gesichtspunkten modernen Anforderungen an den Mathematikunterricht gerecht werden kann ([14], S. 6): „In neuerer Zeit wird nun im Zusammenhang mit dem Einsatz neuer Technologien gefordert, den ‚algorithmischen Strang', sowie die Leitlinien ‚Optimieren' und ‚Algorithmisieren' sowohl im Mathematik- als auch im Informatikunterricht stärker herauszustellen. Hier bieten sich viele Beispiele aus der diskreten Mathematik an."

Weitere Unterrichtsmaterialien wurden bereits bei Lehrerfortbildungen eingesetzt und sind zum Teil im Internet verfügbar (Webseiten der Matheon-Projekte G5 und G6). Die Veröffentlichung in Printmedien ist in Planung.

2.5 Resümee

Die von uns gewählten Themen sind nicht wirklich neu für die Schule. Bereits in den frühen 1970er Jahren wurde von einigen Mathematikdidaktikern das hohe methodisch-didaktische Potenzial des Stoffes erkannt. Im propädeutischen Geometrieunterricht der Grundschule wurden einige Aspekte der Graphentheorie behandelt, aber offensichtlich wurde der Brückenschlag zur Oberschule nie richtig getätigt. Das geht aus den Quellen hervor. In den 1980er und 1990er Jahren war das Interesse an den Themen nicht sehr groß und erst im neuen Jahrtausend wächst das Interesse wieder.

Warum ist dieser Themenkomplex trotz seiner früh erkannten Eignung für das Mathematiklernen nicht schon eher stärker beachtet worden? Aus heutiger Sicht kann man vermuten, dass zwei wesentliche Aspekte dazu geführt haben. Die 1970er Jahre waren von der Diskussion über die sogenannte Strukturmathematik geprägt. Offenbar haben die Reformen, die durch die Rahmenrichtlinien von 1968 angeregt wurden, das Interesse an der Graphentheorie sogar befördert, da topologische Themen in das Blickfeld gerieten und in diesem Rahmen auch die Graphentheorie behandelt werden konnte. Genau dieser Kontext aber könnte ein Hindernis für die Einführung graphentheoretischer Unterrichtseinheiten in der Schule gewesen sein. Der Graphentheorie wurde zunächst vielfach mit Misstrauen begegnet, wie insbesondere aus so manchen einführenden Worten zu Artikeln oder Themenheften herauszulesen ist, weil sie ebenso wie die Mengenlehre als „moderne Mathematik" galt und trotz ihrer hohen Anschaulichkeit auch rein abstrakt behandelt werden kann (wovon einige weitere, hier nicht näher analysierte Artikel zeugen).

Der zweite Aspekt ist der, dass die Graphentheorie und die (damals in der Schulmathematik noch nicht so benannte) kombinatorische Optimierung wechselnden mathematischen Gebieten zugeordnet wurden. Zunächst erschienen sie unter dem Stichwort Topologie und in der Grundschule sogar im Rahmen der Geometrie. Später wurden sie unter Kombinatorik eingereiht und natürlich auch unter Informatik. So konnten die Themen, so stellt es sich jedenfalls aus heutiger Sicht dar, keinen festen Platz im Schulcurriculum finden.

Eine weitere Vermutung ist, dass die Anbindung an klassische Themen des Mathematikunterrichts fehlte (was auch heute gelegentlich kritisiert wird). Topologie und Kombinatorik waren ja ebenfalls für die Schule neue, moderne Themengebiete. Andererseits gab es wohl auch keinen Platz im Lehrplan für einen eigenständigen Themenbereich. Des weiteren waren Wegeprobleme auf Graphen oder z. B. kombinatorische Fragestellungen aus der sogenannten Unterhaltungsmathematik bekannt, so dass die mathematische Tiefe und die didaktische Tragweite der Graphentheorie von vielen nicht erkannt wurde. So scheint es, als ob die Themen buchstäblich „zwischen die Stühle" gerutscht seien.

In den vergangenen Jahren gab es intensive Bemühungen, die kombinatorische Optimierung im Schulunterricht besser zu verankern. Unterrichtsmaterialien, Bücher und Lehrerfortbildungen zeugen von der verstärkten Aktivität, die insbesondere von den zwei Berliner Matheon-Projekten ausging. Das Inkrafttreten der Bildungsstandards in Deutschland im Jahr 2003 vermehrte das Interesse an Unterrichtsinhalten, die besonders geeignet sind, prozessbezogene und mathematische Kompetenzen zu fördern. Die kombinatorische Optimierung bietet hier viele Chancen. Hinzu kommt, dass die Fortentwicklung des immer noch jungen Fachgebietes insbesondere neue schulgeeignete Anwendungen hervorgebracht hat. In Berlin und Hamburg wurden bereits entsprechende Themen in die Wahl(pflicht)bereiche der neuen Lehrpläne aufgenommen. Die weitere Entwicklung bleibt abzuwarten.

3 Typisch diskret - Was macht diskretes Arbeiten aus? Beispiele aus Kombinatorik und kombinatorischer Optimierung

Was zeichnet das Arbeiten mit diskreten Objekten aus? In diesem Kapitel werden elementare diskrete Methoden analysiert, um herauszuarbeiten, welche Tätigkeiten charakteristisch für diskretes Arbeiten sind. Dabei dienen schulrelevante Beispiele aus der Kombinatorik, kombinatorischen Optimierung und Graphentheorie als Grundlage. Im Rahmen der didaktischen Überlegungen zur kombinatorischen Optimierung in Kapitel 5 werden die Ergebnisse dieser Analyse wieder aufgegriffen um daraus Konsequenzen für den Unterricht zu ziehen.

Zunächst einmal die Frage: Was bedeutet „diskret"? Der Fremdwörterduden ([90], S. 190) hat zu „diskret" folgenden Eintrag:

> „1.a) so unauffällig behandelt, ausgeführt o. ä. daß es von den anderen kaum od. gar nicht bemerkt wird; vertraulich; b) taktvoll, rücksichtsvoll; Ggs. → indiskret. 2.a) (von sprachlichen Einheiten) abgegrenzt, abgetrennt, abgrenzbar, z. B. durch Substitution (Sprachw.); b) in einzelne Punkte zerfallend, vereinzelt, abzählbar (bezogen auf eine Folge von Ereignissen od. Symbolen; Techn.);"

Die Definition 2b) trifft am ehesten die Bedeutung des Adjektives in der Mathematik. Diskrete Objekte sind klar voneinander getrennt. Gegenstand der diskreten Mathematik sind endliche (gelegentlich auch abzählbar unendliche) Mengen und ihre Strukturen. Das Gegenteil von „diskret" ist „kontinuierlich". Der Großteil der Schulmathematik ist kontinuierlich, sie beinhaltet beispielsweise die klassische Geometrie mit Strecken und Geraden, auf denen sich unendlich viele Punkte befinden, und Funktionen, die meist auf kontinuierlichen Mengen definiert sind. Diskrete Objekte und Methoden werden jedoch auch an verschiedenen Stellen verwendet, z. B. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, aber meist nur als Hilfsmittel und nie eigenständig.

Matoušek und Nešetřil schreiben im ersten Kapitel ihres Buches ([60], S. 7): „Was *ist* denn nun diskrete Mathematik? So fragt der Leser vielleicht nicht ganz zu Unrecht. Das Adjektiv ‚diskret' ist hier als Gegensatz zu ‚kontinuierlich' gemeint. Die Objekte der diskreten Mathematik (z. B. die natürlichen Zahlen) sind klar voneinander getrennt, und [...] [ein jedes] ist von den anderen wohlunterscheidbar; wir können sie als einzelne ‚Individuen' wahrnehmen (so wie die Bäume in einem nahen Wald). Im Gegensatz dazu gehen bei einem typischen ‚kontinuierlichen' Objekt (z. B. den reellen Zahlen) die einzelnen Punkte ineinander über (wie Bäume in einem Wald, von einem hoch fliegenden Flugzeug aus gesehen). Wir können unsere Aufmerksamkeit auf einen bestimmten Punkt richten, doch es gibt immer ganz nahe dabei noch viele weitere Punkte, die wir nicht alle zugleich als Individuen wahrnehmen können."

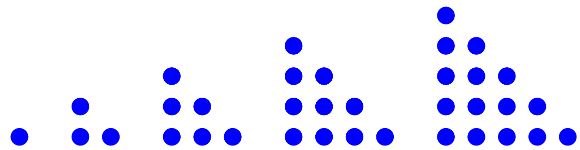


Abbildung 1: Die ersten fünf Dreieckszahlen

Dieses Voneinander-Getrennt-Sein der einzelnen Elemente verlangt die Verwendung von speziellen Techniken. Einige solcher Techniken, die häufig gebraucht werden und die sehr elementar sind, wir nennen sie „diskrete Grundtechniken“, werden wir im nächsten Abschnitt diskutieren. Ziel dabei ist, bewusst zu machen, welche Denk- und Arbeitsweisen beim Anwenden dieser Grundtechniken zum Einsatz kommen.

3.1 Analyse diskreter Grundtechniken

3.1.1 Zählen: klein anfangen und verschiedene Blickwinkel einnehmen

Die nächstliegende Grundtätigkeit bei der Arbeit mit diskreten Objekten ist das Zählen. Objekte, die nicht ineinander übergehen, sondern voneinander getrennt sind, kann man abzählen. Selten sind sie einfach in eine Reihenfolge zu bringen, so dass man sie dann nur noch der Reihenfolge nach abzählen muss. Häufig werden erst einmal Muster oder Abzählformeln gebraucht. Eine einfache Abzählfrage ist z. B. wie groß die n-te Dreieckszahl (siehe Abb. 1) ist. Eine andere Abzählfrage ist die Frage nach der Anzahl der aufspannenden Bäume in vollständigen Graphen. Eine typische Vorgehensweise ist, in sehr kleinen Beispielen (hier: die ersten Dreieckszahlen bzw. die Anzahl der aufspannenden Bäume der vollständigen Graphen K_1, K_2, K_3, K_4) konkret abzuzählen und daraus eine Abzählformel zu erschließen. Die Richtigkeit der Formel muss dann bewiesen werden, oft durch vollständige Induktion (mehr dazu s. u.).

Kleine konkrete Beispiele anzusehen und dabei Muster oder Bildungsgesetze zu erkennen, kann wie in den Beispielen direkt zu einer Vermutung für die Abzählformel führen.[7] Ist die Formel nicht so direkt erkennbar oder aber sind die Beispiele zu groß oder unhandlich, so kann man ein Methode suchen, wie man von einem beliebigen Beispiel zum nächstgrößeren kommt. Die Anzahl der verschiedenen Rundreisen für das asymmetrische TSP (ATSP) auf K_n kann so ermittelt werden, dass zunächst der K_3 betrachtet wird. Dort gibt es zwei verschiedene ATSP-Touren. Will man nun die Anzahl der ATSP-Touren auf dem K_4 bestimmen, können die vorher konstruierten Touren verwendet werden und der neu hinzukommende Knoten dort eingefügt werden. Für diesen vierten Knoten gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, ihn in eine Rundreise durch drei Knoten einzufügen, von denen es zwei gibt. Es ist also 3×2 zu rechnen. Ein fünfter Knoten kann in jeder dieser 3×2 Rundreisen an jeweils

[7] Goldin ([25], S.59) spricht in diesem Zusammenhang von der heuristischen Strategie „modeling the general on the particular“.

vier Stellen eingefügt werden, also $4 \times 3 \times 2$. Die Konstruktionsvorschrift liefert hier gleich die Formel: $(n-1)!$ und die Beweisidee (vgl. [30]).

Andere Abzählprobleme sind nicht so direkt lösbar wie die obigen Beispiele. Manchmal hilft es, auf verschiedene Arten abzuzählen und diese Abzählergebnisse zueinander in Beziehung zu setzen. Das ist die Methode des doppelten Abzählens. Doppeltes Abzählen heißt, dasselbe Problem aus zwei verschiedenen Perspektiven zu betrachten.

Ein sehr einfaches Beispiel ist das Handshaking-Lemma, das besagt, dass die Summe aller Knotengrade in einem Graphen gleich der doppelten Anzahl aller Kanten dieses Graphen ist. Die Vermutung kann durch das einfache Zählen der Kanten und das Ermitteln und Aufsummieren der Knotengrade gefunden werden. Um diese Vermutung zu beweisen, werden die Kantenenden aus zwei verschiedenen Perspektiven heraus betrachtet. Einmal werden die Kantenenden vom Knoten aus betrachtet: bei der Ermittlung des Knotengrades eines jeden Knoten. Dann werden die Kantenenden von der Kante aus gezählt: jede Kante hat zwei Enden. Diese zwei Ergebnisse werden nun in Beziehung gesetzt und ergeben hier bereits die zu beweisende Aussage.

Tätigkeiten beim Abzählen diskreter Objekte:

- Muster bilden oder erkennen,
- ausprobieren und vermuten von Abzählformeln an kleinen Beispielen,
- von einem Beispiel aus nächstgrößere Beispiele konstruieren,
- aus zwei verschiedenen Richtungen auf das Objekt schauen: doppelt abzählen.

3.1.2 Beweisen durch Weiterzählen: vollständige Induktion

Das Voneinander-Getrennt-Sein der Objekte in der diskreten Mathematik hat den Vorteil, dass man sie sich einzeln vornehmen und ansehen kann. Auf der anderen Seite bedeutet das Voneinander-Getrennt-Sein, dass nicht unbedingt von einer lokalen Beobachtung auf das Ganze (die ganze Menge oder den ganzen Graphen z. B.) geschlossen werden kann.

Hier findet sich ein deutlicher Gegensatz zur kontinuierlichen Mathematik. Im kontinuierlichen Fall betrachtet man eine Stelle und kann daraus mindestens auf die Umgebung schließen, wenn nicht sogar globale Aussagen machen. Beispielsweise zeigen die Ableitungen in einem Punkt einer differenzierbaren Funktion, wie der Verlauf in der Umgebung des Punktes aussieht. Auf dieser Eigenschaft beruht die Taylor-Approximation. Mit Hilfe von Differentialgleichungen lassen sich Strömungen modellieren und die Auswirkungen auf das ganze System berechnen, wenn etwa in einem Punkt einzelne Parameter geändert werden. Eine Gerade, die durch zwei Punkte beschrieben ist, ist in ihrer Gesamtheit dadurch bekannt und festgelegt. Der Schnittpunkt mit einer anderen Geraden oder Ebene (die bereits durch Angabe von drei Punkten vollständig charakterisiert ist) kann leicht berechnet werden.

In diskreten Objekten hilft das Wissen über Eigenschaften eines einzelnen Objektes zunächst nicht, Aussagen über die ganze Menge zu machen. Die „Eigenschaft", dass die vierte Dreieckszahl sich durch $1+2+3+4 = 10$ berechnen lässt, vererbt sich nicht automatisch auf die folgenden Zahlen, um auf das Abzählbeispiel zurückzukommen. Wir müssten diese Abzählformel eigentlich für jede einzelne Dreieckszahl neu verifizieren. An dieser Stelle kommt ein sehr mächtiges Werkzeug zum Tragen: die vollständige Induktion.

Die genaue Analyse des Weiterzählschrittes ist der Hauptbestandteil der vollständigen Induktion: Der Schritt von einem Element zu seinem Nachfolger muss einmal detailliert vollzogen sein, dann kann die Kettenreaktion in Gang gesetzt werden und auf diskrete Weise, nämlich Schritt für Schritt, aber dennoch automatisiert, etwas lokal Beobachtetes global bewiesen werden.

Eine passende Analogie ist die Vorstellung, dass in einem Gebäude der zu gehende Weg für einen Unkundigen markiert werden soll. Im kontinuierlichen Fall rollt man eine Schnur entlang des Weges aus. Im diskreten Fall muss man Dominosteine als Kette aufstellen und dann einen Stein anstoßen, der auslöst, dass ein Stein nach dem anderen umfällt und so eben in vielen kleinen Einzelschritten die Distanz überwunden wird. Dabei kann es durchaus sein, dass der Dominostein, der die Kettenreaktion in Gang setzt, nicht das kleinste Element der betrachteten Menge ist.

Tätigkeiten bei der vollständigen Induktion sind:

- finden eines (ersten) Elementes mit der gewünschten Eigenschaft,
- analysieren des Weiterzählschrittes,
- global folgern.

3.1.3 Zuordnen: das Schubfachprinzip

Für das Finden und Beweisen von Aussagen über Eigenschaften von Objekten wie etwa, dass in jedem einfachen Graphen stets mindestens zwei Knoten den gleichen Knotengrad haben, steht als einfaches und doch mächtiges Werkzeug das Schubfachprinzip zur Verfügung. Die Idee ist einfach und handlungsorientiert. Die Eigenschaften (hier die Knotengrade) stellt man sich als Schubfächer oder einfach Körbe oder Kästen vor. Die zuzuordnenden Objekte (hier die Knoten) als Bälle, die in die Körbe gelegt werden müssen.

Zunächst muss man sich darüber klarwerden, wieviele Körbe es überhaupt gibt. Das ist in diesem Beispiel schon der wesentliche Teil dieses Verfahrens. Da nur einfache Graphen betrachtet werden, kann bei n Knoten kein Knotengrad höher als $n-1$ vorkommen. Kommt der Knotengrad $n-1$ tatsächlich vor, so kann wiederum kein Knoten vom Grad 0 dabeisein. Gibt es umgekehrt einen Knoten vom Grad 0, so kann der höchste vorkommende Grad nur noch $n-2$ sein. Also gibt es höchstens $n-1$ Körbe. Auf diese $n-1$ Körbe müssen aber n Bälle (die Knoten) verteilt werden. Nicht in jeden Korb muss etwas gelegt werden. Wie die Verteilung konkret aussieht, kann man nun gar nicht sagen, aber man kann den extremen Fall betrachten, dass zunächst in jeden Korb genau ein Ball gelegt wird. Es bleibt ein Ball übrig, der nun wohl oder übel in einen bereits belegten Korb gelegt werden muss. Und damit ist unsere Aussage bewiesen: Man wird in einem einfachen Graphen immer mindestens zwei Knoten gleichen Grades finden. Das „mindestens“ kommt daher, dass, sobald ein Korb ganz leer bleibt, ein weiterer Ball irgendwo dazugelegt werden muss.

Solch ein Beweis ist ein Existenzbeweis, der nur sicherstellt, dass man die fraglichen Objekte finden kann. Er gibt keine Anleitung, wie sie gefunden werden können. Ein sehr einprägsames Beispiel findet sich bei Lovász/Pelikán/Vesztergombi ([49], S. 46). Dort wird bewiesen, dass es mindestens zwei New Yorker gibt, die die gleiche Anzahl von Haaren auf dem Kopf haben. Niemand wird jemals diese zwei Personen ausfindig machen können, aber wir wissen dennoch sicher, dass es sie gibt!

Tätigkeiten beim Schubfachprinzip:

- identifizieren von zwei diskreten Mengen,
- entscheiden: Wer wird wem zugeordnet (wer ist Korb und wer ist Ball)?
- zuordnen.

3.1.4 Sortieren durch paarweises Vergleichen

Eine weitere diskrete Tätigkeit ist das Sortieren von endlichen Mengen. Voraussetzung dafür ist, dass den Elementen der Menge sogenannte „Schlüssel“ zugeordnet sind, die eine Ordnung besitzen. Diese Schlüssel können sehr unterschiedlich aussehen, je nach dem, was das Ziel des Sortiervorgangs ist. Die Bücher im privaten Bücherregal können etwa nach Autorenalphabet, nach Kaufdatum, nach Höhe oder Dicke oder nach der Farbe des Buchrückens sortiert werden. Für die Tätigkeit des Sortierens spielt es keine Rolle, nach welchem Kriterium geordnet werden soll.

Beim Algorithmus von Kruskal wird von den verfügbaren Kanten jeweils eine mit dem geringsten Gewicht gewählt. Dafür müssen die Kanten nach Gewicht sortiert werden, und zwar in nicht absteigender Reihenfolge. Wie aber geht das Sortieren vor sich? Es gibt verschiedene Sortieralgorithmen, die auf der gleichen Grundope-

3	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
4	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**9**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**9**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**8**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**
6	**6**	**6**	**6**	**6**	**9**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**8**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**7**	**3**	**3**	**3**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**
9	**9**	**9**	**9**	**9**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**8**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**7**	**4**	**4**	**4**	**6**	**3**	**3**	**3**	**5**	**5**	**5**
2	**2**	**2**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**7**	**1**	**1**	**1**	**6**	**4**	**4**	**4**	**5**	**3**	**3**	**4**
5	**5**	**8**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**6**	**6**	**6**	**6**	**1**	**1**	**1**	**5**	**4**	**4**	**4**	**3**
7	**8**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**7**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**
8	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**

Abbildung 2: Sortieren durch Vergleichen: Bubblesort.

ration beruhen. Wieder geht es darum, dass die diskreten, also isolierten Objekte nicht global bearbeitet werden können, was hieße, dass man sie sozusagen wie bei einer Münzsortiermaschine in einen Trichter schüttet und sie dann unten sortiert herauskommen. Was mechanisch möglich ist, geht leider mathematisch nicht. Das Grundprinzip ist das Folgende: Die gegebenen Elemente werden in eine beliebige Reihenfolge gebracht (diese ist meist durch eine Datenstruktur vorgegeben). Dann wird ein Element herausgenommen und dessen „Schlüssel" mit dem eines bestimmten anderen Elements verglichen.

Entweder bleibt das Element an seinem Platz oder es wird mit dem anderen vertauscht. Dieses Vorgehen wird mit einem nächsten Paar von Elementen wiederholt, so lange, bis die gewünsche Ordnung erreicht ist. Das heißt, dass Sortieren fortgesetztes Vergleichen und Vertauschen bedeutet.

In der Methode *Bubblesort* wird dieses Prinzip besonders klar sichtbar (siehe Abb. 2). Die Menge der zu ordnenden Zahlen ist hier senkrecht angeordnet. Die großen Zahlen werden wie Luftblasen in einem Wasserglas nach oben transportiert. Jeder einzelne Schritt ist leicht nachvollziehbar und durchzuführen. Übereinanderliegende Zahlen werden verglichen und entweder vertauscht oder, falls sie schon in der gewünschten Reihenfolge sind, stehen gelassen.

Gute Sortieralgorithmen sind in der Wahl der Elemente, die miteinander verglichen werden sollen, besonders geschickt. aber sie kommen im Allgemeinen um diesen paarweisen Vergleich nicht herum. Es geht hier also um die Art und Weise, wie die sehr einfache Grundoperation in den Ablauf eingebunden wird.

Typische Tätigkeiten beim Sortieren diskreter Mengen:

- paarweise vergleichen,
- vertauschen,
- wiederholen dieser Tätigkeiten.

3.1.5 Kombinieren und in Beziehung setzen: Codes und Graphen

Durch die Kombination von diskreten Elementen können neue Objekte geschaffen werden. Aus den Ziffern 0 und 1 können Binärcodes, aus den Knotennummern eines Baumes der Prüfercode erzeugt werden. Ausgewählte Kanten eines Graphen können zu Wegen oder Kreisen kombiniert werden. Für die Erzeugung sinnvoller Kombinationen müssen Konstruktionsvorschriften beachtet werden. Solche Kantenkombinationen können mithilfe der Knotennamen wiederum codiert werden.

Arbeitet man mit der Grundoperation „Kombinieren", so interessiert es häufig, wie viele Möglichkeiten es geben kann (z. B. Permutationen), so dass hier wieder Abzählfragen ins Spiel kommen.

Neben der Möglichkeit, durch Kombination neue Objekte zu schaffen, kann durch Zuordnen bzw. in Beziehung setzen eine zusätzliche Struktur geschaffen werden. Werden die Elemente einer diskreten Menge einander paarweise zugeordnet, also in Beziehung gesetzt, so entsteht die Struktur eines Graphen.

Mit algorithmischen Vorgehensweisen können ebenfalls neue diskrete Strukturen geschaffen werden: Folgen von Objekten (vgl. den Artikel von Günter Malle [59]). Bei Algorithmen, die in jeder Iteration eine neue Kante hinzufügen bzw. eine Kante wegnehmen, wie beim Algorithmus von Prim, erhält man sogar nach Inklusion auf- bzw. absteigende geordnete Mengen als Folgenglieder: die einzelnen Stadien der Konstruktion.

Neue diskrete Objekte entstehen durch

- kombinieren diskreter Objekte,
- in Beziehung setzen diskreter Objekte.

3.2 Arbeiten mit Graphen

Dieser Abschnitt ist der speziellen Charakteristik von Graphen gewidmet. Graphen spielen in der diskreten Mathematik eine besondere Rolle, wie Aigner betont ([3], S. 88): „Graphen bilden die fundamentale Datenstruktur der diskreten Mathematik – und der Grund ist einleuchtend. Man kann in praktisch jeder Situation eine sinnvolle binäre Relation erklären, sie also als Graphen modellieren. [...] Die wichtigste Anwendung von Graphen [...] [ergibt] sich in der Optimierung von vorgegebenen Situationen. Wir wollen ja zum Beispiel ein Verkehrssystem nicht nur beschreiben, sondern einen optimalen Verkehrsfluß ermitteln.“

3.2.1 Flexibilität der Darstellung

Graphen sind besonders einfache Beispiele radikaler mathematischer Abstraktion.[8] Graphen sind binäre Relationen auf endlichen Mengen, (gelegentlich auch auf abzählbar unendlichen Mengen). Die Lage und Form der Knoten und Kanten sind dabei nicht festgelegt. Die Zeichnung eines Graphen ist eine Darstellungsform des Graphen, die mehr beinhaltet als der Graph selbst: geometrisch festgelegte Orte für Knoten und Kanten. Matoušek und Nešetřil ([60], S. 5) formulieren das Phänomen der Anschaulichkeit ohne Geometrie so: „Die meisten Gebiete der Graphentheorie behandeln Probleme, die man zwar geometrisch veranschaulichen kann, in denen die Geometrie aber nicht wirklich eine Rolle spielt.“ Aus dieser Grapheneigenschaft ergibt sich direkt, dass ein und derselbe Graph verschiedene Zeichnungen besitzen kann. Je nach dem, mit welchem Ziel ein Graph gezeichnet wird, kann die Zeichnung unterschiedlich aussehen, überkreuzungsfrei (falls möglich) oder mit symmetrisch angeordneten Knoten beispielsweise.

Graphen können als Mengensystem, als Zeichnung oder durch Datenstrukturen dargestellt werden. Adjazenz- und Inzidenzmatrizen, sowie Nachbarschaftslisten sind die am häufigsten verwendeten Datenstrukturen. Dadurch, dass die Struktur „Graph“ so wenig Festlegungen beinhaltet, kann der Übergang zwischen verschiedenen Darstellungsformen ohne komplizierte Überlegungen oder Umformungen geschehen. Ein schneller Wechsel ist jederzeit möglich. Die einzige Beschränkung liegt in der Größe des Graphen (Anzahl der Knoten und/oder Anzahl der Kanten), die eine Zeichnung in tolerierbarem Zeitaufwand unmöglich machen kann.

[8] Unter dem Stichwort „Abstraktion als Extrakt“ wählen Davis und Hersh Darstellungsformen von Graphen als Beispiel ([17] S. 132–135).

Graphendarstellungen

- lassen sich leicht ineinander überführen,
- ermöglichen einen flexiblen Wechsel,
- benötigen keine Geometrie.

3.2.2 Schritt für Schritt: algorithmisches Arbeiten

Dadurch, dass die Lage der Knoten und Kanten eines Graphen geometrisch im Allgemeinen nicht festgelegt ist, müssen für Konstruktionen und Beweise auf Graphen besondere Vorgehensweisen gefunden werden, die auch ohne geometrische Hinweise auskommen. Beispielsweise gibt es keinen „kleinsten Knoten“ oder „am weitesten unten liegenden Knoten“, auch wenn die Zeichnung des Graphen dies manchmal suggeriert. Es muss dennoch festgelegt werden, welcher Knoten bzw. welche Kante für einen Operationsschritt ausgewählt werden soll. Sofern die Knoten nummeriert sind, kann von dem „Knoten mit der kleinsten Nummer“ gesprochen werden, wie etwa bei der Erstellung des Prüfer-Codes für einen Baum. Anderenfalls findet man in der den Graphen repräsentierenden Datenstruktur eine Reihenfolge der Knoten und Kanten vor, die gegebenenfalls verwendet werden kann. Liegt der Graph als Tupel aus Knotenmenge V und Kantenmenge E vor, muss die Wahl eines Knotens im Rahmen eines Verfahrens noch allgemeiner formuliert werden.

Wie kann also mit Graphen gearbeitet werden? Wie schon bemerkt, gibt es einerseits keine geometrische Orientierung, so dass Arbeitsweisen wie z. B. „von links nach rechts“ nicht möglich sind, und andererseits gibt es auch keine infinitesimale Annäherung an einzelne Stellen (auch hier wäre eine gewisse räumliche Orientierung notwendig, aber auch dass die einzelnen Elemente des Graphen durch kontinuierliche Elemente miteinander in Verbindung stehen würden). Hier kommt wieder das Voneinander-Getrenntsein diskreter Objekte zum Tragen.

Dennoch ist es möglich, Konstruktionen wie das Finden eines aufspannenden Baumes auf Graphen allgemein zu formulieren. Solche Konstruktionen werden schrittweise, also algorithmisch formuliert. Die einzelnen Konstruktionsschritte bleiben dadurch sichtbar. Zusammenfassende Schreibweisen gibt es kaum, so dass die diskreten Grundtätigkeiten wie auswählen oder markieren oder in eine Liste schreiben auch in der endgültigen Formulierung sichtbar bleiben.

Es gibt keine geschlossenen Formeln, die solche Konstruktionen beschreiben können. Soll etwa ein minimaler aufspannender Baum in einem Graphen gefunden werden, so könnte man eine untere Schranke des Gesamtgewichtes leicht berechnen durch Addition der $n-1$ kleinsten Kantengewichte bei n Knoten. Doch sagt diese Zahl noch nicht sehr viel aus, denn gesucht ist nicht nur eine Zahl, sondern ganz konkret der

Baum. Dafür könnte man noch zusätzlich, nachdem die Kanten in nicht-absteigender Reihenfolge geordnet wurden, die ersten $n-1$ Kanten dieser Liste konkret benennen. Doch leider hat man mit diesem Verfahren im Allgemeinen kein kreisfreies Resultat. Wie also kann Kreisfreiheit erzeugt werden? Auch für das Aufspüren von Kreisen gibt es kein Verfahren, das global wirksam ist, das also „mit einem Blick“ erkennt, ob ein Graph Kreise besitzt oder nicht. Es muss schrittweise gearbeitet werden: Kante für Kante wird der Baum konstruiert und dabei müssen für jede neu hinzugewählte Kante bestimmte Kriterien überprüft werden.

Die Suche nach dem Optimum liefert also gleichzeitig auch die Konstruktionsvorschrift für die Optimallösung. Die Konstruktionsvorschrift bleibt im Falle elementarer Algorithmen (hier geht es nicht um konkrete Implementierungen in Programmiersprachen, sondern um die – z. B. in Pseudocode bzw. im Unterricht umgangssprachlich formulierten – Grundideen der Algorithmen), meist einfach nachvollziehbar, da keine mathematischen Vereinfachungen im Sinne von zusammenfassenden Schreibweisen (wie z. B. das Summen- oder das Integralzeichen) gemacht werden. Es gibt dann keine Formel-Kurzschreibweise für z. B. „Nimm stets von den noch nicht betrachteten Kanten die mit dem geringsten Gewicht, aber nur, wenn sie im bereits konstruierten Teilbaum keinen Kreis schließt“. Verkürzt wird z. B nur im Sinne der Formulierung von Schleifen.

Ebenso wie es algorithmische Konstruktionen gibt, so gibt es auch algorithmische Beweise: Bewiesen wird nicht durch logische Argumentationsketten, sondern durch die Angabe einer Konstruktionsvorschrift, die das gewünschte Ergebnis liefert. Die Korrektheit des Verfahrens muss dann ihrerseits bewiesen werden, wobei häufig die Technik des „kleinsten Verbrechers“ zum Einsatz kommt. Dabei wird ein kleinstes Gegenbeispiel betrachtet und dessen Existenz mit Hilfe dieser Eigenschaft, das kleinste zu sein, zum Widerspruch geführt. Der „kleinste Verbrecher“ wird bei der Betrachtung von Graphenalgorithmen in dem Sinne interpretiert, dass das (Zwischen-)Ergebnis der Konstruktion zu dem Zeitpunkt betrachtet wird, in dem zum ersten Mal eine falsche Kante oder ein falscher Knoten gewählt wird. Die zeitliche Abfolge eines algorithmischen Vorgehens liefert hier die Orientierung, die in der kontinuierlichen Mathematik durch geometrische Lage oder infinitesimale Annäherungsmöglichkeiten geboten wird.

Ein Beispiel für einen algorithmischen Beweis ist das schrittweise Abpflücken von Blättern eines Baumes, um zu zeigen, dass die Anzahl der Kanten eines Baumes mit n Knoten $n-1$ ist. Die Vermutung, dass dieser Zusammenhang besteht, lässt sich schnell durch einige Beispiele finden. Von dem vorhandenen Baum auf n Knoten werden nun sukzessive einzelne Blätter abgepfückt (hier darf der Beweis nicht fehlen, dass nach Abpflücken eines Blattes ein Baum zurückbleibt), solange bis ein Baum übrigbleibt, von dem man sicher weiß, dass die Vermutung stimmt: der Baum auf zwei Knoten. Dieser Beweis gibt eine konkrete Handlungsanweisung, die schrittweise ausgeführt werden muss.

Für den Beweis der Aussage, dass in jedem Eulergraphen eine Eulertour existiert, kann ein Algorithmus angegeben werden, der solch eine Tour konstruiert. Natürlich muss dann auch die Korrektheit des Algorithmus gezeigt werden.

Algorithmisches Arbeiten

- kombiniert diskrete Grundtätigkeiten,
- lässt die einzelnen Grundtätigkeiten erkennbar,
- liefert durch zeitliche Abfolge einen Ersatz für die fehlende geometrische Orientierung bzw. infinitesimale Annäherungsmöglichkeiten,
- produziert Konstruktionsvorschriften,
- ermöglicht handlungsorientierte Beweise.

3.2.3 Wegeprobleme modellieren heißt Entscheidungsstellen ausfindig machen

Für die Modellierung von Problemen der kombinatorischen Optimierung bieten sich häufig ganz natürlich Graphen an. Ist das der Fall, so fällt eine Tätigkeit des Modellierens weg: die Wahl des geeigneten mathematischen Darstellungsmittels. Dennoch ist der Modellierungsprozess alles andere als trivial. Was aber passiert dann beim Modellieren? Es muss, was typisch für den Vorgang des Modellierens ist, die gegebene Problemsituation auf das für die Problemlösung Wesentliche reduziert werden.

Ist das Problem anhand von Kartenmaterial gegeben, wie etwa beim Kürzeste-Wege-Problem oder beim Chinesischen Postboten-Problem, so liegt damit bereits ein Modell vor, das nun weiter vereinfacht werden muss. Wie stark kann bei solchen Wegeproblemen vereinfacht werden? Und als zweite Frage: Welche Daten haben wir im Klassenzimmer überhaupt zur Verfügung? Zwar ist die Situation im Klassenzimmer nicht sehr realitätsnah, die Frage nach der Verfügbarkeit von Daten ist aber ein wichtiges Problem, das die Problemlösung in der Praxis stark beeinflusst.

Beim Modellieren von Wegeproblemen mit Graphen ist eine wesentliche Frage, wo und wieviele Knoten gesetzt werden müssen, das heißt, an welchen Stellen Entscheidungen getroffen werden können. Hier ist die Verwandtschaft zu Entscheidungsbäumen und Wahrscheinlichkeitsbäumen direkt sichtbar. Das Setzen eines Knotens bedeutet, dass an dieser Stelle eine lokale Entscheidung zu treffen ist. Bei Straßennetzen, wie sie beim Kürzeste-Wege-Problem oder beim chinesischen Postbotenproblem vorkommen, mag diese Denkweise zunächst ungewohnt sein, man kann es sich jedoch an drei Beispielen gut klarmachen: an der Modellierung eines Labyrinths, von Umsteigemöglichkeiten mit der U-Bahn und einer Straßenkreuzung. Beim Labyrinth sieht ein erster Versuch von Schülerinnen und Schülern oft so aus,

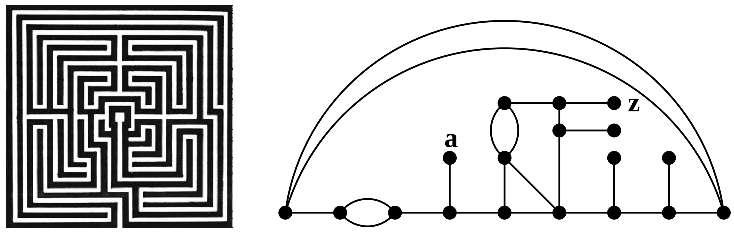


Abbildung 3: Ein Labyrinth und sein Graphenmodell.

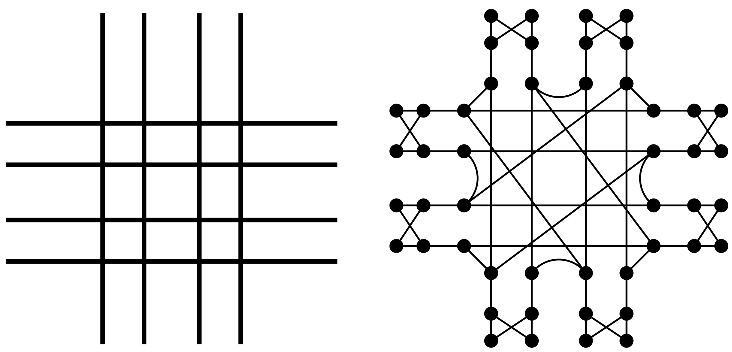


Abbildung 4: Versuche, eine Kreuzung zu modellieren.

dass an jeder Ecke des Weges ein Knoten gesetzt wird. Interessant für die Lösung ist es aber nicht, wieviele Knicke der Weg hat, sondern an welchen Stellen eine Wegekreuzung ist, also eine Entscheidung für das Weitergehen gefällt werden muss (siehe Abb. 3).

Ein U-Bahn-Netzplan ist an sich schon ein Graph, das heißt, für beispielsweise kürzeste-Wege-Probleme in Bezug auf U-Bahn-Fahrten muss hier nicht weiter modelliert werden. Geht es aber darum, das Umsteigen zu betrachten, werden die Bahnhöfe (also die Knoten) zwischen den Umsteigebahnhöfen uninteressant und können weggelassen werden. Die Umsteigebahnhöfe müssen dafür etwas aufwändiger modelliert werden, um die beiden Optionen Umsteigen bzw. Nicht-Umsteigen deutlich zu machen. Der Graph zeigt dann nur noch, wo eine Entscheidung zwischen Umsteigen und nicht Umsteigen getroffen werden kann.

Für die Straßenkreuzung sind eine Reihe von Modellierungsentscheidungen zu treffen. Soll jede Fahrspur einzeln dargestellt werden? Werden Spurwechselmöglichkeiten berücksichtigt? Kann man auch von der linken Spur auf die linke Spur links abbiegen oder nur auf die rechte? Werden Wartezeiten an der Ampel modelliert? Bekommen die Kanten Richtungen? Eine typische erste Schülerlösung für diese Modellierungsaufgabe hat keinen einzigen Knoten (siehe Abb. 4), ist also zunächst gar kein Graph, aber nur so lange, bis man auf dieser Zeichnung (die an jeder Kantenkreuzung einen potentiellen Knoten enthält) alle Fahrmöglichkeiten ausprobiert und feststellt, dass gewisse Entscheidungsmöglichkeiten ausgeschlossen werden (indem man dort, wo es sie gibt, Knoten setzt).

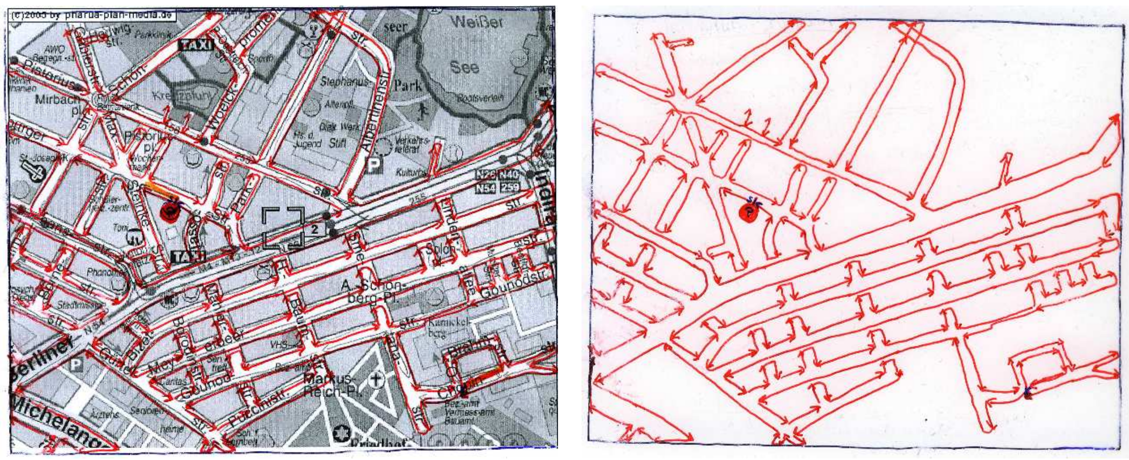


Abbildung 5: Modellierung des Postbotenweges durch einen Graphen mit einem Knoten und einer Kante: Es bleiben keine Entscheidungsmöglichkeiten, der Weg ist eindeutig!

Mit Graphen Wegeprobleme zu modellieren heißt also, die Stellen ausfindig zu machen, an denen Entscheidungen getroffen werden müssen. Diese Interpretation setzt einen dynamischen Umgang mit dem so erzeugten Graphen voraus: das Ablaufen von Kanten. Ein extremes Beispiel ist die Modellierung des Postbotenweges einer Schülerin aus der 13. Klasse (siehe Abb. 5). Sie hat bereits im Prozess der Modellierung eine optimale Tour konstruiert, daher hat ihr Graph nur einen Knoten und eine (lange) Kante.

Anders stellt es sich dar, wenn Zustände als Graphen modelliert werden sollen, etwa die Freundschaftsverhältnisse in einer Klasse. Pro Person wird dann ein Knoten benötigt und die Kanten repräsentieren das Vorhandensein der vorher definierten Beziehung. Die Modellierung solcher Realsituationen erfordert andere Überlegungen und Tätigkeiten als die Modellierung von Wegeproblemen. Hier repräsentieren Knoten keine Entscheidungsstellen.

Modellieren von Wegeproblemen mit Graphen beinhaltet

- herausfinden, wo Entscheidungen bei der Wahl eines Weges getroffen werden können, und entscheiden, welche davon berücksichtigt werden,
- Knoten setzen, wo solche Entscheidungsstellen sind,
- Kanten setzen, wo Entscheidungsmöglichkeiten aufeinander folgen.

3.3 Zusammenfassung

Innerhalb des von uns gewählten Themenkanons lassen sich einige diskrete Grundtätigkeiten ausmachen:

- zählen,
- auswählen,
- zuordnen,
- vergleichen,
- kombinieren/in Beziehung setzen,
- entscheiden.

Durch die Kombination dieser Grundtätigkeiten in algorithmischen Verfahren entstehen die Werkzeuge, mit denen Probleme der kombinatorischen Optimierung gelöst oder Grapheneigenschaften bewiesen werden können. Im Gegensatz zum Kontinuierlichen wird das Schritt-für-Schritt-Arbeiten, das bei der Erarbeitung passiert, am Ende nicht in eine geschlossene Form(el) gegossen, sondern die Grundtätigkeiten bleiben sichtbar in algorithmischen Lösungen und Beweisen.

Die in Objekten der kontinuierlichen Mathematik gegebene räumliche Orientierung gibt es für Graphen im Allgemeinen nicht. Der zeitliche Ablauf eines Algorithmus kann eine entsprechende Orientierung geben, so dass beispielsweise mit der Methode des „kleinsten Verbrechers“ im Sinne eines „frühesten Verbrechers“ gearbeitet werden kann.

Modellierung von (schulrelevanten) Wegeproblemen durch Graphen bedeutet, Knoten an die Orte zu setzen, an denen Entscheidungen getroffen werden können und diese Entscheidungsorte miteinander zu verbinden, wenn sie nacheinander in Betracht gezogen werden können.

4 Die Auswahl der Inhalte und Wahl der Fachbegriffe

Zur Verwirklichung eines authentischen Mathematikunterrichts sind Inhalte der diskreten Mathematik, insbesondere der kombinatorischen Optimierung besonders geeignet. Die didaktische Analyse des Stoffes findet sich in Kapitel 5. Zunächst jedoch soll erläutert werden, welche Inhalte aus dem Fachgebiet ausgewählt wurden und es werden Begründungen für die Wahl der Begriffe und Definitionen gegeben.

4.1 Die Themen

Aus dem reichen Themenspektrum der diskreten Mathematik wurden folgende vier bereits klassisch gewordenen Themen der kombinatorischen Optimierung gewählt:

- das Kürzeste-Wege-Problem,
- minimale aufspannende Bäume,
- das chinesische Postbotenproblem,
- das Travelling-Salesman-Problem.

Färbeprobleme, die ebenfalls zu den klassischen Problemen des Gebietes gehören, wurden im Rahmen des Projektes nicht bearbeitet, weil diese Problematik weniger Vernetzungen zu den anderen Themen hat. Färbeprobleme bieten aber mindestens ebensoviele Lernanlässe wie die anderen Themen und sind ähnlich leicht zugänglich und motivierend. Flüsse in Netzwerken wären ebenso wie Matchings und entsprechende Algorithmen in der Schule machbar, sind in ihrer Problemformulierung aber nicht so griffig und leicht zugänglich wie die gewählten Themen. Zudem sind die Algorithmen deutlich schwieriger und können vermutlich nicht von Schülern selbständig gefunden werden.

Was also zeichnet die gewählten Themen aus? „Ein Problem ist gut, wenn uns seine Lösung zu neuen Einsichten, Methoden oder gar einer neuen Theorie führt.“ ([60], S. 6) schreiben Matoušek und Nešetřil zu Beginn ihres Buches über diskrete Mathematik. Alle vier von uns gewählten Themen haben gemeinsam, dass die Problemstellungen an sich einerseits sehr schnell und unmittelbar verständlich sind und an Anwendungen aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler festgemacht werden können, andererseits aber so weit tragen, dass daraus der ganze Themenkomplex entwickelt werden kann. Die direkte Zugänglichkeit der Fragestellungen ergibt sich daraus, dass für die Problemformulierung keinerlei mathematische Fachbegriffe notwendig sind. Die Problemstellung knüpft direkt an den Erfahrungshorizont „mathematischer Laien“ an. Wer hat nicht schon einmal nach dem optimalen Weg gesucht? Dieses Optimierungsproblem tritt auch im Alltag von Kindern auf, beispielsweise, wenn sie versuchen, den schnellsten Schulweg herauszufinden, um morgens länger schlafen zu können.

Die Planung von optimalen (Telefon-)Netzen oder von Rundreisen kommt in den unmittelbaren Alltagserfahrungen zwar nicht unbedingt vor, aber die Notwendigkeit der Optimierung solcher Netze oder Rundreisen leuchtet dennoch auf der Stelle ein und kann durch das Hineinversetzen in entsprechende Situationen nachempfunden werden. Die Anforderung, eine optimale Lösung zu finden, hilft dabei, zielgerichtet auf die Problemlösung hinzuarbeiten.

Alle vier Themenbereiche haben Anwendungen, die im Alltag zum Tragen kommen und jeden betreffen (Routenplanung, Müllabfuhr, Post, Chipdesign, Leiterplattenherstellung, Internet, etc.). Damit wird ein direkter Bezug zwischen Alltäglichem und dem Unterricht geschaffen. Die klassische Frage nach dem Nutzen der in der Schule gelernten Mathematik wird direkt beantwortet. Das Spektrum der Anwendungen wächst beständig. Und hier liegt vermutlich der wichtigste Grund, warum Graphentheorie und kombinatorische Optimierung erneut in das Blickfeld des Mathematikunterrichts kommen. Innerhalb der Mathematik wächst die Bedeutung diskreter Methoden ebenso. Das liegt u. a. daran, dass in allen Bereichen mit computergestützten Methoden gearbeitet wird, und Computer zwangsläufig diskret vorgehen.

Alle Themen sind Optimierungsprobleme. Eine der Leitlinien im Mathematikunterricht ist das Optimieren (vgl. z. B. [71]). Allerdings werden im schulischen Kontext fast ausschließlich Optimierungsprobleme aus der Analysis bearbeitet. Diskrete Optimierung ist bislang nur in den seltensten Fällen Schulthema.

In unseren Themen stößt man immer wieder schnell auf offene Probleme. Das Besondere an diesen offenen Problemen ist, dass sie sich direkt aus der Problembearbeitung ergeben können, und von den Schülerinnen und Schülern selbst formuliert werden können.

Es werden Algorithmen verwendet, die nicht sehr kompliziert sind. Die Behandlung von Algorithmen schließt die Frage nach geeigneten Datenstrukturen ein, so dass hier die (ohnehin nicht klar zu ziehende) Grenze zur Informatik überschritten wird, was wiederum zu einem realistischen Bild von Mathematik beiträgt.

Innerhalb der gewählten Themenkomplexe musste eine Auswahl getroffen werden, um in sich abgeschlossene Bereiche zu schaffen. Das heißt natürlich nicht, dass nicht auch andere Aspekte im Unterricht eine Rolle spielen, insbesondere, wenn das Entdecken und Erforschen durch die Schülerinnen und Schüler im Vordergrund steht. Lehr- und Lernmaterialien können allerdings immer nur eingegrenzte Themengebiete darstellen.

Alle vier Themen benötigen das Konzept der Graphen. Für die von uns gewählten Problemstellungen können ausschließlich ungerichtete Graphen betrachtet werden. Die Unterscheidung gerichtet/ungerichtet kann im Rahmen der Modellierung interessant sein, bringt aber im weiteren Verlauf des Problemlöseprozesses keinen Mehrwert, da die Lösungsmethoden in beiden Fällen fast identisch sind und sich nur in winzigen Details unterscheiden. Daher wird für den Unterricht eine klare Eingrenzung auf ungerichtete Graphen empfohlen.

4.2 Die Wahl der Fachbegriffe

In der kombinatorischen Optimierung gibt es für einige der Objekte keine einheitlichen Benennungen. Daher mussten Entscheidungen für den Gebrauch in der Schule getroffen werden, die hier kurz erläutert werden sollen. Grundsätzlich werden deutsche Bezeichnungen englischen Bezeichnungen vorgezogen bis auf wenige begründete Ausnahmen.

Die Problemstellungen werden von uns in folgender Weise benannt:

- **das Kürzeste-Wege-Problem**,
- **minimale aufspannende Bäume**,
- **das chinesische Postboten-Problem**,
- **das Travelling-Salesman-Problem**.

Gelegentlich wird auch vom Problem des kürzesten Weges oder dem Handelsreisendenproblem gesprochen. Dass für das Travelling-Salesman-Problem die englische Bezeichnung gewählt wurde, liegt daran, dass diese sich schon sehr stark auch im Deutschen etabliert hat und überdies eine sehr handliche Abkürzung bereitstellt: das TSP.

Das chinesische Postboten-Problem wird vorne ohne Bindestrich geschrieben, weil nicht das Problem des chinesischen Postboten gemeint ist, sondern das von einem Chinesen erstmals formulierte Problem des Postboten.

Die minimalen aufspannenden Bäume schließlich werden nicht als Problem formuliert. Anders als beim Kürzeste-Wege-Problem würde der Begriff Minimale-aufspannende-Bäume-Problem nicht deutlich machen, aus welcher Anwendung heraus man sich dieses Problem erschließen kann. Im Unterricht wurde gelegentlich vom **Telefonproblem** gesprochen, um die Ausgangsanwendung, ein kostengünstiges Telefonnetz zu suchen, deutlich zu machen. Anders als einige andere Autoren verwenden wir nicht die Bezeichnungen „minimal aufspannender Baum“ und „Spannbaum“. Ersteres suggeriert, dass der Baum minimal aufspannend sein soll anstelle dessen, dass der aufspannende Baum minimal sein soll, was angesichts der Optimalität der Kantenzahl eines aufspannenden Baumes natürlich nicht gemeint ist, aber für Anfänger trotzdem irritierend sein kann. Spannbaum ist vermutlich eine direkte Übersetzung von „spanning tree“ und ruft weniger konkrete Assoziationen über die aufspannende Eigenschaft hervor als die andere Bezeichnung.

In der deutschsprachigen Literatur finden sich die Problemstellungen in verschiedenen Schreibweisen: Nitzsche [62] schreibt von dem Chinese Postman Problem, dem Traveling Salesman Problem, vom kürzesten Weg und vom minimalen aufspannenden Baum. Bei Schuster [74] werden auch die englischen Bezeichnungen verwendet, hier mit Bindestrich: Minimum-Spanning-Tree-Problem, Shortest-Path-Problem, Traveling-Salesman-Problem, was eine gewisse Einheitlichkeit hervorbringt.

Gritzmann/Brandenberg [27] haben sich für diese Varianten entschieden: Chinesisches-Postboten-Problem, Traveling-Salesman-Problem, Kürzeste-Wege-Problem, Spannbaumproblem. Bei Aigner [3] findet man: das Problem des chinesischen Postboten, das Traveling Salesman Problem. Weitere Autoren wählten wiederum andere Bezeichnungen. Es gibt also in der Fachliteratur beinahe jede erdenkliche Variante.

Graphen schreiben wir entgegen den Regeln der Neuen Rechtschreibung nicht „Grafen". Wir verwenden für den Schulunterricht die Bezeichnungen **Knoten** und **Kanten** und für gerichtete Kanten **Bögen**. In der älteren didaktischen Literatur zur Graphentheorie findet man häufig die Bezeichnung „Netz" für einen ungerichteten Graphen und „Bogen" für eine ungerichtete Kante (z. B. bei [85]).

Nicht selten werden die Knoten „Ecken" genannt (z. B. bei Aigner [3]). „Ecke" statt „Knoten" erscheint in zweierlei Hinsicht als nicht so günstig für den unterrichtlichen Gebrauch: Einmal, weil es an geometrische Sachverhalte erinnert und gerade die Loslösung von konkreten geometrischen Vorstellungen ein wichtiger Aspekt der Arbeit mit Graphen ist. Zum Anderen, weil „Ecke" und „edge" sehr leicht verwechselt werden können. Die englischen Bezeichnungen „vertex" und „edge" kommen in dem Moment zum Einsatz, in dem die Knoten- und Kanten*mengen* benannt werden sollen. Aufgrund des gleichen Anfangsbuchstabens im Deutschen wird hier auf die englischen Bezeichnungen zurückgegriffen und V und E verwendet. Das Hin- und Herwechseln zwischen Deutsch und Englisch macht Schülerinnen und Schülern üblicherweise keine Schwierigkeiten.

Im Falle von Kosten, Wegstrecken etc. die an Kanten anliegen, sprechen wir von **Kantengewichten** und **gewichteten Graphen**. Andere Autoren schreiben stattdessen „bewertet" (z. B. [62]) oder „beschriftet" . „Gewichtet" bringt die Vorstellung ins Spiel, dass an den Kanten etwas von (durchaus im physikalischen Sinne) gewisser Schwere hängt. Diese Vorstellung könnte helfen, die Gewichtung auch plastisch vor sich zu sehen, mit dickeren und dünneren Kanten oder mit mehr oder weniger tief durchhängenden Kanten.

Das größte Bezeichnungs-Wirrwarr herrscht bei Wegen, Pfaden etc. Ausgehend von der Tätigkeit des Kantenanmalens bei der Suche nach Wegen oder Bäumen in Graphen verwenden wir die Bezeichnung **Kantenzug** für eine Folge aneinanderstoßender Kanten, die ohne Abzusetzen hintereinander gezeichnet werden können (dies entspricht der „Kette" bei Grötschel [28], S. 12). Ein Kantenzug ohne Knotenwiederholungen ist dann ein **Weg**. Der „Pfad" als Kantenzug, in dem alle Kanten verschieden sind, aber nicht notwendigerweise alle Knoten, wird als Bezeichnung nur dann eingeführt, wenn die Arbeit der Schülerinnen und Schüler dies erfordert.

Für aufspannende Bäume wurde in der älteren didaktischen Literatur die Bezeichnung „Gerüst" gewählt (siehe z. B. [10], [43]). Diese Bezeichnung ist heute nicht mehr sehr gebräuchlich.[9] Die Bezeichnungen **Baum** bzw. **aufspannender Baum** und **Blätter** finden sich in der deutschsprachigen Literatur durchgängig und zudem

[9] In [79] ist sie z. B. noch zu finden.

bergen diese Begriffe einen (nicht zu unterschätzenden) Assoziationsreichtum wie nur wenige andere mathematische Begriffe: „I hope to convince you that mathematical trees are no less lovely than their biological counterparts ... “ ([58]).

4.3 Wichtige Definitionen

Es gibt sehr viele unterschiedliche Möglichkeiten, mathematische Objekte zu definieren. Im unterrichtlichen Kontext werden Definitionen häufig anders formuliert als im fachwissenschaftlichen Kontext. In diesem Abschnitt werden die für den Unterricht und die Lehr- und Lernmaterialien gewählten Formulierungen didaktisch begründet.

Definitionen spielen eine äußerst wichtige Rolle beim Mathematiktreiben. Im Prozess des Erforschens von Mathematik stehen sie allerdings häufig ganz am Ende. Mit Hilfe einer Definition werden die gefundenen und verwendeten Objekte präzise beschrieben. Ein Objekt bekommt einen Namen und eine genaue Beschreibung und ab diesem Zeitpunkt muss man nicht jedesmal, wenn man mit dem Objekt arbeitet, alle Voraussetzungen und Eigenschaften dazusagen. Je nach Verlauf der unterrichtlichen Erarbeitung können also auch unterschiedliche Definitionen entstehen.

Bei der Aufarbeitung eines mathematischen Themas für den Unterricht kommt man in den Lehrmaterialien nicht umhin, einige Definitionen vorzugeben. Im Rahmen eines genetischen Unterrichts ist es sinnvoll, die Definitionen auf das abgegrenzte Stoffgebiet abzustimmen und insbesondere nur das zu definieren, was für den Unterricht gebraucht wird. Es wird also beispielsweise nicht unbedingt die höchste Stufe der Allgemeinheit angestrebt, sondern nur das berücksichtigt, was für die gerade erarbeitete Problematik eine Rolle spielt. Es soll kein ungenutztes „Vorratswissen“ angelegt werden. Dadurch entsteht eine klare Abgegrenztheit des Gebietes, die für die Lernenden, die zum ersten Mal damit in Kontakt kommen, hilfreich ist und Sicherheit im Umgang gibt. In einem genetisch sequenzierten Unterricht kann es auch immer wieder vorkommen, dass Definitionen sich im Unterrichtsverlauf verändern, um neu entdeckten Anforderungen gerecht zu werden.

Gleichzeitig sollen Definitionen Möglichkeiten zum Weiterforschen im Unterricht offenlassen, wie weiter unten z. B. bei der Definition des Knotengrades erläutert wird. Ebenso können von den Schülerinnen und Schülern selbst gefundene und formulierte alternative Definitionen Anlass zum mathematischen Argumentieren sein. Daher wurden bevorzugt eher anschauliche Definitionen gewählt, die aber alternative Definitionen mit einem höheren Mathematisierungsgrad nicht ausschließen.

Als Graphendefinition wurde eine Beschreibung gewählt, die sich auf den visuellen Eindruck bezieht und ganz auf das Benennen von Mengen verzichtet und somit auch schon für jüngere Schülerinnen und Schüler geeignet ist.

> Ein *Graph* ist ein Gebilde aus *Knoten* und *Kanten*. Kanten verbinden stets zwei Knoten (die nicht unbedingt verschieden sein müssen).
> Zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, heißen *Nachbarn* oder *benachbart*.

Diese Graphendefinition schließt auch unzusammenhängende Graphen ein. Ebenso sind Graphen mit Doppelkanten und Schlingen, die auch „Multigraphen“ genannt werden, in der Definition enthalten. Graphen, die keine Doppelkanten und Schlingen haben, werden als *einfache Graphen* bezeichnet. Will man hervorheben, welche Knoten und welche Kanten den Graphen G bilden, so schreibt man $G(V, E)$. Dabei bezeichnet V die Menge der Knoten (von engl. *vertices*) und E bezeichnet die Menge der Kanten (von engl. *edges*). Eine Abbildung, die jede Kante auf ein Paar von Knoten abbildet, gewährleistet, dass die Kanten auch tatsächlich in Knoten beginnen und enden.

Was die gewählte Definition nicht explizit beinhaltet, ist, den Graphen losgelöst von einer bildlichen Darstellung als rein abstrakte Relation wahrzunehmen. Diese Abstraktionsstufe spielt in einem anwendungs- und problemorientierten Unterricht nur eine marginale Rolle.

Auf das Benennen der Kanten mit eigenen Namen wird meist verzichtet, da kanonisch der Doppelname aus den beiden Knotennamen zur Verfügung steht. Dadurch bleiben Graphenzeichnungen übersichtlicher und es wird stärker als mit Kantennamen, die an Streckennamen aus der Geometrie erinnern, der kombinatorische Aspekt hervorgehoben: Kanten als zweielementige Tupel aus $V \times V$.

Der Knotengrad wird (da wir Graphen als Multigraphen definiert haben) als Anzahl der Kantenenden in einem Knoten definiert, so dass Schlingen keinen Sonderfall darstellen.

> Die Anzahl der in einen Knoten mündenden Kantenenden heißt der *Grad* des Knotens.

Auch diese Definition ist so gewählt, dass sie den anschaulichen Zugang unterstützt. Knotengrade von ungewichteten, ungerichteten einfachen Graphen als Zeilen- oder Spaltensummen der Adjazenzmatrix zu erkennen, ist dann eine Folgerung aus der Definition und kann als eigenes kleines Forschungsergebnis von Schülerinnen und Schülern entdeckt werden.

Die Definition von *Weg* erschließt sich aus der Anwendung heraus, und muss im Verlauf der Problembearbeitung irgendwann mathematisch präzise gefasst werden. Insbesondere, wenn von der Problematik des kürzesten Weges ausgegangen wird, so ergibt sich die Definition ganz natürlich. Die Definition von *Kantenzug* (übernommen aus [62], S. 19) ist bewusst anschaulich gehalten, da sie sich aus dem handelnden Umgang mit Graphen unmissverständlich ergibt: Ein Kantenzug ist eine Folge von

Kanten, die man, ohne den Stift anzuheben, in einem Zug zeichnen kann.

Ein *Kantenzug* ist eine Folge von aneinander stoßenden Kanten (die nicht unbedingt alle verschieden sein müssen), die ohne abzusetzen gezeichnet werden kann. Ein *Weg* ist ein Kantenzug ohne Knotenwiederholungen.

Ist der Kantenzug bereits definiert, so können Kreise ganz kurz charakterisiert werden:

Ein geschlossener Kantenzug, der außer dem Anfangs- bzw. Endknoten jeden seiner Knoten nur einmal durchläuft, heißt *Kreis*.

Kreise, die sich selbst überkreuzen, werden damit nicht zugelassen. Sie sind innerhalb unseres Definitionsrahmens aus mehreren Kreisen zusammengesetzte Gebilde. Für den Unterricht, insbesondere, wenn mit der Lochblende gearbeitet wird (siehe Kap. 6), ist diese Definition sinnvoll. Zudem erspart man sich die Unterscheidung zwischen „Kreisen“ und „elementaren Kreisen“.

Auch wenn Kreise in der Geometrie eine ganz andere Bedeutung haben, birgt dieser Begriff keine Schwierigkeiten, sofern damit das „im Kreis laufen“ assoziiert wird, das auch im Alltag keineswegs immer auf kreisbogenförmigen Wegen geschieht (vgl. dazu auch Abschnitt 6.1).[10]

Unter einer *Tour* wird ein geschlossener Kantenzug verstanden. Die *Eulertour* ist eine Tour, die jede Kante eines zusammenhängenden Graphen genau einmal verwendet. Die *TSP-Tour* ist ein Hamiltonkreis, d. h. ein Kreis, der alle Knoten des Graphen beinhaltet.

Die Definition von *Zusammenhang* wird, wieder aus dem handelnden Umgang mit der Ausgangsproblematik heraus, mit Hilfe von Kantenzügen formuliert.

Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn jeder Knoten mit jedem anderen durch einen Kantenzug verbunden ist. Besteht ein Graph aus mehreren untereinander nicht verbundenen Teilen, so nennt man diese Teile *Zusammenhangskomponenten*.

Natürlich hat auch ein Graph, der nur aus einem Teil besteht (ein zusammenhängender Graph also) eine Zusammenhangskomponente: nämlich sich selbst. Doch ist dieser Fall für den Unterricht nicht relevant. Entweder ist ein Graph zusammenhängend oder er besteht aus mehreren Zusammenhangskomponenten.

[10] Zur Phänomenologie der Begriffe Kantenzug, Weg und Kreis siehe Schuster [74], S. 134–139.

Aus Anwendungsbeispielen heraus, bei denen Kanten für optimale Verbindungsnetze aus Graphen ausgewählt werden sollen, ergibt sich die folgende Baumdefinition, wobei erst der aufspannende Baum definiert wird und zunächst ein Baum als Sonderfall eines aufspannenden Baumes erscheint:

> Ein *aufspannender Baum* eines zusammenhängenden Graphen ist ein kreisfreier und zusammenhängender Teilgraph, der alle Knoten des ursprünglichen Graphen erreicht.
> Ein Graph, der selbst sein aufspannender Baum ist, heißt einfach *Baum*.
> Anders ausgedrückt: Ein *Baum* ist ein kreisfreier zusammenhängender Graph.

Ist der ursprüngliche Graph nicht zusammenhängend, so kann man darin keinen aufspannenden Baum finden, aber einen aufspannenden *Wald*, der aus mehreren Bäumen besteht.

Wird diese Definition verwendet, so können einige Baumeigenschaften daraus gefolgert werden, die zum Teil für äquivalente Baumdefinitionen verwendet werden können, etwa die Eindeutigkeit der Wege in einem Baum.

Gängige Datenstrukturen für Graphen sind: Adjazenz- und Inzidenzmatrix und Nachbarschaftslisten. Die Adjazenzmatrix mit ihrer quadratisch-symmetrischen Form bietet sich zum vertieften Handeln besonders an, da sie besonders einfach zu erstellen und zu lesen ist. Die Symmetrieeigenschaften können von den Schülerinnen und Schülern selber erkannt werden. Zudem ist es zum Aufstellen einer Adjazenzmatrix nicht nötig, die Kanten zu benennen, was schon bei nicht allzugroßen Graphen ansonsten recht mühsam werden kann. Aus dem Hantieren mit diesen Datenstrukturen ergibt sich das Phänomen der *Graphenisomorphie*. Die – mathematisch betrachtet etwas umständliche, aber aus dem Unterrichtsgang heraus handliche – Definition der Graphenisomorphie lautet dann so:

> Zwei Graphen heißen *isomorph*, wenn man die Knoten beider Graphen so (um-)benennen kann, dass die Adjazenzmatrizen beider Graphen gleich sind.

Es ist eine aus dem Handeln mit Adjazenzmatrizen heraus entstandene Definition, die zugleich eine Methode zum Überprüfen der Isomorphie mit an die Hand gibt. Das Überprüfen von Isomorphien ist ein algorithmisch schwieriges Problem, das eine eigene Klasse in NP bildet. Das Erkennen von isomorphen Graphen ist dennoch Teil des gewählten Stoffkanons, da im Unterricht die Beispiele stets klein genug sind, um tatsächlich die Matrizen aufzustellen oder mit Hilfe von Kriterienkatalogen Isomorphien bzw. Nicht-Isomorphien bestimmen zu können.

Eine präzise Unterscheidung zwischen zwei Zeichnungen ein und desselben Graphen und zwei Zeichnungen zweier isomorpher, aber nicht gleicher Graphen wird im schulischen Kontext nicht gemacht. Diese kleine mathematische Unschärfe wird zu Gunsten eines grundsätzlichen Verständnisses des Phänomens in Kauf genommen.

Die einzige wichtige Definition, die weniger anschaulich gewählt wurde, ist die Matchingdefinition. Da im Rahmen der Bearbeitung des chinesischen Postbotenproblems allgemeine Matchings vorkommen und nicht nur bipartite, wird eine allgemeine Definition gebraucht. Die Schwierigkeit dabei ist, dass im allgemeinen Fall nicht alle Knoten gematcht werden, ansonsten läge eine Definition über den Begriff der Knotenpaarung nahe (abgesehen davon, dass der Begriff „Knotenpaarung" stets eine gewisse Heiterkeit bei Mittelstufenklassen auslöst). Die von uns gewählte Definition hat keinen Bezug zur Anschaulichkeit, was eine Herausforderung an die Schülerinnen und Schüler ist. An dieser Stelle ist das, anders als bei den grundlegenden Definitionen, durchaus gewollt, da Matchings erst zu einem späten Zeitpunkt der Erarbeitung benötigt werden, zu dem schon einiges an Vorwissen vorhanden ist.

Ein *Matching* ist ein Teilgraph, in dem alle Knoten höchstens Grad 1 haben. Ein *perfektes Matching* hat lauter Knoten vom Grad 1, es sind also alle Knoten zu Paaren verbunden.

Anschaulichere Definitionen, die ähnlich von Schülerinnen und Schülern formuliert werden können, sind: Ein Matching ist eine Menge von isolierten Kanten. Oder: In einem Matching sind die Knoten entweder zu Paaren verbunden oder einzeln.

4.4 Algorithmen

Innerhalb jedes der vier gewählten Themen spielen Graphenalgorithmen eine wichtige Rolle. Der Schwerpunkt der Unterrichtseinheiten kann je nach Wunsch stärker auf graphentheoretische oder auf algorithmische Elemente gelegt werden. Bei der Wahl der Algorithmen wurde Wert darauf gelegt, dass diese sehr elementar sind und somit durch die Schülerinnen und Schüler (nach-)erfunden werden können.

Wo es sinnvoll möglich war, wurden Algorithmen für den ungewichteten Fall denen für gewichtete Graphen vorausgeschickt. Insbesondere beim Kürzeste-Wege-Problem hilft das Verständnis des weniger komplexen ungewichteten Falles (Breitensuche) sehr, den doch etwas komplizierteren Algorithmus von Dijkstra zu verstehen bzw. auf die grundlegenden Ideen dieses Algorithmus selber zu kommen.

Die Formulierung der Algorithmen wird in den Materialien bewusst umgangssprachlich gehalten. Es ist nicht Ziel des Mathematikunterrichts, Programmiersprachen zu erlernen. Es kann jedoch sinnvoll sein, innerhalb des Mathematikunterrichts über elementare Datenstrukturen nachzudenken, um die Mechanik von Algorithmen klarer zu strukturieren und verstehen zu können.

Für die vier Themenbereiche wurden folgende Algorithmen gewählt:

- Breitensuche,
- Tiefensuche,
- Algorithmus von Dijkstra,
- Algorithmus von Prim,
- Algorithmus von Kruskal,
- Zwiebelschalen-Algorithmus,
- Algorithmus von Fleury,
- einfache Konstruktions- und Verbesserungsheuristiken für das TSP.

Obwohl im Rahmen der Bearbeitung des chinesischen Postbotenproblems Matchings und sogar minimale Matchings vorkommen, wird in den Unterrichtsmaterialien auf Matching-Algorithmen verzichtet.[11] Diese Algorithmen sind weitaus schwieriger als alle anderen gewählten und würden den von uns gewählten inhaltlichen und zeitlichen Rahmen für eine Unterrichtseinheit sprengen. In diesem Fall wird auf eine augenscheinlich gute „von-Hand-Lösung“ zurückgegriffen. Es ist bereits anspruchsvoll genug, eigene Ideen für einen Algorithmus zur Konstruktion von Euler-Touren zu finden.

4.5 Beweise

Grundsätzlich wird im Unterricht über kombinatorische Optimierung Wert auf Beweise gelegt, was neben anderen Aspekten einen Beitrag zur Authentizität des Unterrichts liefert. Selbst gefundene Vermutungen sollen argumentativ untermauert werden. Gerade bei der Arbeit mit Graphen, bei der viele Resultate offensichtlich erscheinen, weil sie aus der Anschauung heraus entstanden sind, ist es wichtig, Beweise zu fordern. Wir haben Sätze gewählt, deren Beweise für Schülerinnen und Schüler nicht nur verständlich sind, sondern auch selbst gefunden werden können, beispielsweise den Satz über die Anzahl ungerader Knoten in Graphen.

Viele Beweise in der Graphentheorie verwenden das Prinzip der vollständigen Induktion. Da die vollständige Induktion wenn überhaupt, dann erst in der Oberstufe unterrichtet wird, wurde in den Materialien darauf geachtet, Beweise anzugeben, die andere Techniken verwenden (auch wenn hinter manch einer Formulierung das Prinzip der vollständigen Induktion verborgen ist). Auch hier stand der Anspruch im Vordergrund, Beweise zu finden, die nah an möglichen Schülerlösungen liegen.

[11] In dem Buch „Kombinatorische Optimierung erleben“ [38] ist ein Kapitel dem Thema gewidmet, um Interessierten den Zugang dazu zu ermöglichen.

Das heißt, dass handlungsorientierte Elemente, wie „Kanten ablaufen“ den Vorrang vor stärker formalisierenden Formulierungen bekamen.

In den Buchkapiteln (siehe Kapitel 8) (wie auch im Unterricht) stehen immer wieder Sätze als „Folgerungen“ aus Beweisen. Damit wird versucht, dem genetischen Prinzip Rechenschaft zu tragen. Im handelnden Erforschen geschieht es nicht selten, dass das Ergründen einer Vermutung bereits Beweistechniken liefert. Erst wenn klar ist, dass eine Vermutung bewiesen werden kann, wird sie als Satz formuliert.

Eines eigenen Kommentars bedürfen die Korrektheitsbeweise für Algorithmen. In der Mittelstufe ist es schwierig, überhaupt ein Fehlerbewusstsein für Algorithmen zu wecken (vgl. Schuster [72], [73], [74]). Das Beweisbedürfnis ergibt sich nicht direkt aus der Schülertätigkeit, anders als bei Graphensätzen (vgl. dazu Kapitel 5). Daher wurden die Korrektheitsbeweise für Algorithmen in den fakultativen Bereich verlegt. Es wurde bei der Formulierung der Beweise besonders darauf geachtet, keine Schritte auszulassen oder als „trivial“ zu bezeichnen.

5 Das didaktische Potenzial der kombinatorischen Optimierung

In diesem Kapitel erfolgt eine **Analyse des didaktischen Potenzials** des gewählten Stoffkanons. Einerseits spielen hier sogenannte stoffdidaktische Überlegungen[12] eine Rolle, andererseits fließen erste Unterrichtserfahrungen ein. Aus dieser Analyse ergeben sich Folgerungen für Aufbau und Methodik des Unterrichts. Einige methodische Überlegungen werden in diesem Kapitel bereits dargelegt. In Kapitel 6 folgt dann die detaillierte Beschreibung der wichtigsten neu entwickelten Unterrichtsmethoden.

*Das **didaktische Potenzial** eines Stoffes definieren wir als die Summe der dem Stoff innewohnenden didaktisch-methodischen Möglichkeiten.*

Im Folgenden werden wir nicht sämtliche Aspekte der kombinatorischen Optimierung analysieren können, sondern diejenigen, die uns am wichtigsten erscheinen. Die Analyse typisch diskreter Tätigkeiten aus Kapitel 3 wird dabei an verschiedenen Stellen wieder aufgegriffen.

Rosenstein und DeBellis formulieren eine Vision, die sich in unseren Erfahrungen bestätigt ([18], S. 49, Hervorhebung durch die Autoren): „*Our vision of discrete mathematics is that it is a vehicle for giving teachers a new way to think about traditional mathematical topics and a new strategy for engaging their students in the study of mathematics* – engage students in mathematics by involving them in discrete mathematics. Discrete mathematics offers a ‘new start’ for teachers and a ‘new start’ for students.“

5.1 Leichte Zugänglichkeit

Die kombinatorische Optimierung zeichnet sich durch eine besonders leichte Zugänglichkeit aus, wie die Erfahrungen im Unterricht belegen. Wir wollen der Frage nachgehen, was die Ursachen dafür sind.

Für den Unterricht über kombinatorische Optimierung benötigt man nur eine recht kleine Zahl von grundlegenden Begriffen. Graph, Knoten, Kante, Nachbar, Knotengrad, Kantengewicht: mit diesen wenigen Begriffen kommt man schon sehr weit in der Bearbeitung der Problemstellungen. Die Anzahl der Grundbegriffe ist aber nicht das wesentliche Kriterium für eine leichte Zugänglichkeit. Für die Bruchrechnung benötigt man außer „Zähler“ und „Nenner“, „Bruch“ und „Kehrbruch“ zunächst

[12] Der Begriff „Stoffdidaktik“ ist übrigens nie konkret definiert worden, vgl. Reichel [66]. Reichel stellt aber fest, dass sie „[. . .] für jede Art von *Verbindung* inhaltlich-mathematischer Aspekte mit *Unterrichtskultur* im weitesten Sinne zuständig ist [. . .]“ (S. 180).

keine neuen Begriffe und dennoch ist dieses Gebiet für Schülerinnen und Schüler oft schwierig und schwer zugänglich.

„Betrachtet man das Entstehen von Mathematik, dann sind im Denken des Menschen zunächst gewisse Grundvorstellungen vorhanden, die auf grundlegende mathematische Begriffe führen.“ (Vollrath [83], S. 28) Aus dieser Aussage kann geschlossen werden, dass ein mathematisches Gebiet umso leichter zugänglich ist, je näher seine Grundbegriffe alltäglichen Grundvorstellungen sind.

Viele neue Begriffe, die bei der Arbeit mit Graphen vorkommen, **können direkt aus der Anschauung heraus gebildet werden.** „Knoten“ und „Kante“ werden zunächst mit den Objekten assoziiert, die man zeichnet. Später erst werden diese Begriffe abstrakter gefasst, wenn es um Datenstrukturen für Graphen geht. „Nachbar“ ist ein ganz natürlicher Begriff für miteinander verbundene Knoten. Hier kommt die alltägliche Grundvorstellung dem mathematischen Begriff sehr nahe. Ebenso greift das „Kantengewicht“ Alltagsvorstellungen auf.

Andere Begriffe entstehen aus dem Handeln heraus. Der graphentheoretische Begriff „Kreis“ wird problemlos akzeptiert, wenn er aus der Tätigkeit des Wegefindens und Kantenanmalens heraus gefunden wird. „Kreis“ bedeutet dann: eine Figur, die entsteht, wenn man Kanten nacheinander abläuft oder mit dem Stift abfährt, so dass man am Ende wieder dort herauskommt, wo man angefangen hat. Es bleibt dabei noch herauszuarbeiten, dass es sinnvoll ist, keine Kreise zuzulassen, die sich selbst überkreuzen, denn diese lassen sich problemlos in überkreuzungsfreie Kreise zerlegen.

Schuster ([74], S. 205 ff.) analysiert ein Unterrichtsgespräch über Wege, Kantenzüge und Kreise aus seinem Unterricht und erkennt dort Schwierigkeiten mit dem graphentheoretischen Kreisbegriff. Seine Schülerinnen und Schüler bleiben stark in der geometrischen Anschauung verhaftet und verlangen zunächst von Kreisen, dass sie auch „rund“ im geometrischen Sinne sind. Die Erfahrungen aus unseren Unterrichtsversuchen bestätigen dieses Problem nicht. Dort wurde der Kreisbegriff aus der Tätigkeit „im Kreis laufen“ entwickelt und war dadurch von vornherein nicht geometrisch gebunden. Der von Schuster geschilderten Problematik könnte mit dem Einsatz der Lochblende (siehe Kapitel 6) begegnet werden, die die geometrische Orientierung eliminiert und so nur noch den Aspekt des „so laufen, dass man wieder am Ausgangspunkt ankommt“ übriglässt.

Der Begriff „Weg“ z. B. knüpft schon vom Begriffsnamen her an Alltagsvorstellungen an. Der graphentheoretische Gehalt des Begriffs entspricht auch weitgehend dem alltäglichen, bis auf die Kreisfreiheit, die im Alltag nicht unbedingt mit „Weg“ verknüpft wird. Aber das Verbot von Kantenwiederholungen stimmt wieder mit dem intuitiven Begriffsverständnis überein.

Gerade deshalb, weil viele graphentheoretischen Begriffsbildungen sehr nahe an den vorhandenen Grundvorstellungen liegen, ist ein mathematisches Präzisieren der Begriffe so gut möglich und auch notwendig. Die Alltagsvorstellung hilft dabei, zunächst überhaupt eine Vorstellung zu entwickeln. Im Sinne eines authentischen Mathematikunterrichts kann an diese Vorstellung angeknüpft werden und während der Problembearbeitung immer wieder überprüft werden, ob der Begriff in seiner Bedeutung weiter präzisiert werden muss, ob Einschränkungen oder Erweiterungen nötig sind oder unbemerkt vorausgesetzt werden.

Im Verlauf der Erarbeitung eines der Themenbereiche kommt auf diese Weise eine gewisse Zahl von Definitionen zusammen. Holliday ermutigt seine Leser ([35], S. 87): „But the definitions are so natural, that they do not overwhelm the student."

Neben dem „natürlichen" intuitiven Zugang zu den Grundbegriffen begründet sich die leichte Zugänglichkeit der kombinatorischen Optimierung noch in einigen weiteren Faktoren: **die Nähe der Anwendungen zum Alltag, die Modularität des Stoffes, der hohe Aufforderungscharakter, die Experimentierfreundlichkeit von Graphen, das algorithmische Arbeiten mit alltagsnahen Grundtätigkeiten**. Diese Aspekte werden u. a. in den folgenden Abschnitten besprochen.

5.2 Anwendungsbezug / Alltagsbezug und die Leitlinie Optimieren

Kombinatorische Optimierung besitzt eine Fülle von Anwendungen, bzw. ist aus Anwendungsfragen heraus entstanden. Bereits das Königsberger Brückenproblem zeigt, wie aus einer angewandten Fragestellung heraus mathematische Theorie entwickelt wurde. **Viele Anwendungen** für die klassischen Themen der kombinatorischen Optimierung wie Routenplanung, Optimierung von Touren der Müllabfuhr oder von Rundreisen **sind unmittelbar verständlich, weil sie innerhalb des Erfahrungshorizontes von Schülern liegen**. Eine Identifikation mit den Problemstellungen ist möglich, da sie Alltagsfragen aufgreifen, die jeden betreffen. Jeder hat schon einmal versucht, den optimalen Weg herauszufinden, etwa auf dem Schulweg oder auf dem Weg in den Urlaub, um nur zwei Beispiele zu nennen.

Und trotz all dieser Anwendungsfreudigkeit kommt auch die Mathematik selbst nicht zu kurz, wie Anderson im Vorwort seines Buches „A first course in Combinatorial Mathematics" beschreibt ([5], S. vii): „The subject [. . .] still remains an easily accessible area of mathematics, one which is becoming more and more widely used in other disciplines. The days are past when the calculus was thought to be the queen of applicable mathematics. But despite its applications, the subject of this book is genuine mathematics in all its purity [. . .]."

Anwendung und Innermathematisches, Modellieren und Mathematiktreiben liegen hier nah beieinander. Das macht die Themen so gut zugänglich und so besonders gut geeignet für eine authentische Auseinandersetzung mit Mathematik.

Goldin beschreibt die Möglichkeit, rasch zu Erfolgserlebnissen zu gelangen ([25], S. 60): „In discrete mathematics, we have going for us the fact that the situations are often easy to describe and familiar, and early success experiences are not too difficult to build in."

Allen von uns gewählten Themen liegen Optimierungsfragen zugrunde. Optimierungsprobleme zeichnen sich dadurch aus, dass sie ein klares Ziel vorgeben, was ebenso klar motiviert ist. Es bedarf keiner Erläuterungen, dass eine bestmögliche Lösung gesucht wird (herauszufinden, was genau mit „bestmöglich“ gemeint ist, ist allerdings Teil des Erarbeitungsprozesses). So schnell wie möglich, so billig wie möglich, so kurz wie möglich: Das sind Zielvorgaben, die im Alltag ständig präsent sind, und die keiner Rechtfertigung bedürfen. Floer ([19], S. 2) beschreibt **Optimierungsprozesse als eine Form intellektueller Auseinandersetzung mit der Umwelt**.

Optimieren bedeutet zielgerichtetes Arbeiten. Das selbständige Forschen der Schülerinnen und Schüler wird von dem Leitgedanken Optimieren vorangetrieben. **Optimieren bedeutet zudem, dass es nicht zwingend nur eine zulässige Lösung für das Problem gibt** (wie leider häufig bei klassischen Mathematikaufgaben), sondern dass es mehrere Lösungen geben kann, von denen wir eine beste herausfinden wollen.

Dieser Gedanke öffnet die Erarbeitungswege, lässt Spielräume offen. **Wenn es verschiedene zulässige Lösungen gibt, dann kann mit diesen experimentiert werden.** Es besteht die hohe Wahrscheinlichkeit, dass jeder bei der Bearbeitung der von uns gewählten Problemstellungen eine solche Lösung findet, denn es gibt nicht nur einen einzigen Lösungsweg, der direkt zum Ziel führt. Wurde eine zulässige Lösung durch Probieren gefunden, so kann darauf aufbauend weiter überlegt werden. Verbesserungsheuristiken für das Travelling-Salesman-Problem greifen dies auf.

Aber auch beim Erfinden von Algorithmen zur Konstruktion kürzester Wege kommen solche Verbesserungsprozesse vor, etwa, wenn die Breitensuche, die in ungewichteten Graphen kürzeste Wege konstruiert, auf gewichtete Graphen angewandt wird. Dieses Verfahren liefert eine zulässige Lösung, nämlich Wege vom Startknoten zu allen anderen Knoten, man stellt aber schnell fest, dass die so konstruierten Wege nicht optimal sind. Nun kann das Verfahren verändert werden und anhand der Ergebnisse getestet werden, ob es kürzeste Wege erzeugt. So geschieht eine Annäherung an ein Lösungsverfahren, das ein Optimum erzeugt, Schritt für Schritt über verschiedene zulässige Lösungen. Selbstverständlich muss die Korrektheit eines so gefundenen Verfahrens bewiesen werden und reicht die Überprüfung durch „Hingucken“ nicht aus, aber sie hilft, Verbesserungen vorzunehmen und selbständig zu forschen.

5.3 Modularität des Stoffes

Eine Voraussetzung für einen selbstgesteuerten Lernprozess ist, dass der Stoff verschiedene individuelle Lernwege zulässt. Solch eine Offenheit kann auf verschiedene Weisen realisiert werden. Offene Aufgaben lassen verschiedene Lösungen zu. Modellierungsaufgaben können durch unterschiedliche Modellierungsannahmen auf unter-

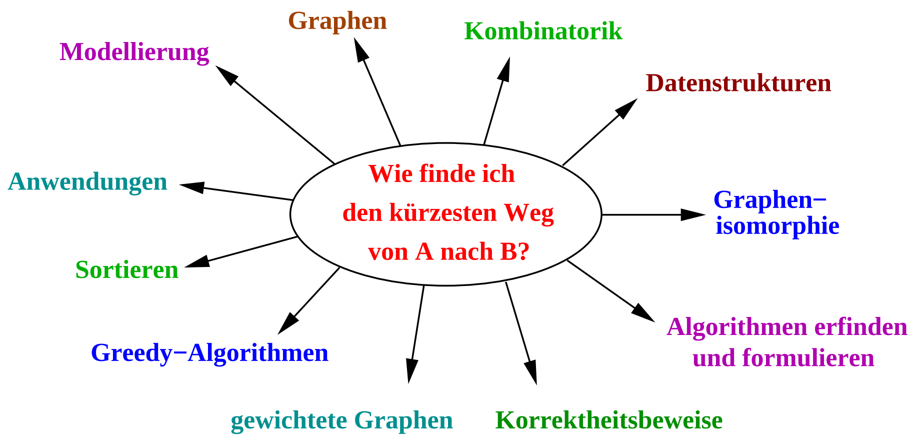


Abbildung 6: Der Stoff ist nicht hierarchisch gegliedert. Dadurch eignet er sich besonders für einen entdeckenden Unterricht.

schiedliche Lösungsansätze und Ergebnisse führen. Im Falle der kombinatorischen Optimierung ist besonders die Modularität des Stoffes hervorzuheben. **Der Stoff ist nicht hierarchisch gegliedert**, sondern bietet die Möglichkeit in verschiedene Richtungen ausgekundschaftet zu werden.

Ausgehend von einer zentralen Problemstellung (siehe die jeweiligen Anfänge der Buchkapitel [55], [56], [57] in Kapitel 8) können die Lernenden in einem Unterricht, der offen gestaltet ist, ihren individuellen Fragen nachgehen. Man kann beispielsweise Algorithmen entwickeln, ohne vorher Graphentheorie betrieben zu haben. Die graphentheoretischen Fragestellungen, die bei der Entwicklung eines Algorithmus eine Rolle spielen, tauchen dann auf, wann sie benötigt werden und werden dann bearbeitet. Umgekehrt kann es sein, dass einige Schüler sich zuerst für die Struktur des Problems interessieren und so auf graphentheoretische Sachverhalte stoßen. Andere wiederum vertiefen sich lieber zunächst in Detailfragen der Modellierung.

Diese Offenheit im Erkundungsprozess ermöglicht es, über mehrere Schulstunden hinweg freies Forschen zuzulassen, um dann die Erkundungswege zusammenzutragen, zu vergleichen und jeweils noch nicht Bearbeitetes von anderen zu lernen. Auch in einem Unterricht, in dem die Klasse gemeinsam an einzelnen Problemen arbeitet, kann diese Modularität des Stoffes genutzt werden: Die Lehrperson legt die Reihenfolge der Erarbeitungsschritte nicht im Vorhinein fest, sondern kann auf das Unterrichtsgeschehen reagieren und die Schülerinnen und Schüler den jeweils aktuell diskutierten Fragestellungen nachgehen lassen. Eine Voraussetzung dafür ist eine Offenheit der Lehrperson gegenüber dem Unterrichtsverlauf und gegenüber unerwarteten Fragen und Wendungen im Unterricht. Praktisch sieht es so aus, dass sämtliche Unterrichtsmaterialien für die Lehrperson greifbar sein müssen, um nach Bedarf darauf zugreifen zu können.

5.4 Arbeiten auf unterschiedlichen Niveaus

Nicht nur die Struktur des Stoffes ermöglicht ein schülerzentriertes und binnendifferenziertes Arbeiten. Auch die einzelnen Inhalte können auf unterschiedlichen Niveaus bearbeitet werden. Dabei ist sowohl an eine Binnendifferenzierung innerhalb einer Klasse gedacht als auch an den Einsatz gleicher Themen in verschiedenen Klassenstufen oder Schularten.

Der Formalisierungsgrad kann erheblich variiert werden. Die wesentlichen Inhalte bleiben auf jedem Niveau erhalten. Das Arbeiten mit Graphen z. B. kann auf einer rein bildlichen Ebene bleiben. Argumentationen können dann anschaulich geführt werden, ohne eine formalisierte Sprache zu verwenden, aber dennoch mit den wesentlichen Grundideen. Mit leistungsstärkeren Lerngruppen können dieselben Dinge abstrakter und mittels Fachsprache und mathematischer Schreibweisen erarbeitet und dokumentiert werden. Beweise (bzw. Argumentationen zur Begründung von Vermutungen) werden dann nicht mehr mit Hilfe von Beispielen geführt, sondern allgemeingültig formuliert.

Im Rahmen der Erarbeitung von Algorithmen zeigt sich eine ähnliche Situation. Die Spannbreite zwischen dem rein handelnden Umgang (Anmalen von Knoten und Kanten) und einer detaillierten Pseudocode-artigen Formulierung eines Algorithmus ist sehr groß. Die Grundideen für die Algorithmen können aber auf jedem Niveau vermittelt und erfasst werden.

5.5 Alltagsnahe Grundtätigkeiten und überschaubares Methodenrepertoire

Die in Kapitel 3 dargestellten diskreten Grundtätigkeiten zeichnen sich insbesondere dadurch aus, dass sie auf einigen im Alltag gebräuchlichen Tätigkeiten basieren. **Der Umgang mit den Dingen des täglichen Lebens ist meist diskret**, nur weniges in der alltäglichen Erfahrung ist wirklich kontinuierlich außer Raum und Zeit. **Zählen, Zuordnen, Sortieren, in Beziehung setzen und Entscheiden gehören zu unserem gewohnten Tätigkeitsrepertoire.** Das Zählen des Geldes in der Spardose, Aufräumen, Bücher im Bücherregal ordnen und die Überlegung, wer innerhalb der Klasse gerade mit wem befreundet ist, entscheiden, welcher Pullover am besten zur Hose passt, sind Beispiele für diese diskreten Grundtätigkeiten in der Lebenswelt von Schülerinnen und Schülern.

Werden diskrete Abzählmethoden thematisiert, so wird über vertraute einfache Tätigkeiten reflektiert und dabei auch das Repertoire an Methoden erweitert. Vertrautes einmal auf eine andere als die gewohnte Art und Weise zu tun, fördert einen mathematisch- analysierenden Blick, der Teil der Problemlösekompetenz ist. Ebenso wichtig für eine gute Problemlösekompetenz ist die Fähigkeit, eine Sache aus zwei verschiedenen Perspektiven zu betrachten. Die Methode des doppelten Abzählen verwendet diese Technik im Rahmen der Grundtätigkeit des Zählens.

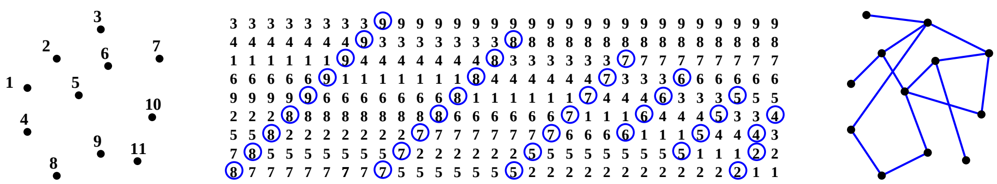


Abbildung 7: Diskrete Grundtätigkeiten: Zählen, Ordnen, Strukturieren/in Beziehung setzen.

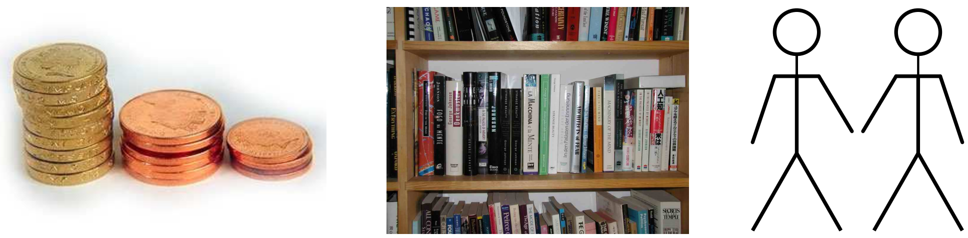


Abbildung 8: Diskrete Grundtätigkeiten im Alltag: Zählen, Ordnen, Strukturieren/in Beziehung setzen.

Die Methode „klein anfangen und dann auf Größeres schließen“ ist dem intuitiven Verhalten sehr nah. Der Beweisschritt von n nach $n+1$ im Rahmen der vollständigen Induktion erfordert dann präzises logisches Argumentieren, da hier der (sonst nicht weiter beachtete) Weiterzählschritt gerade die Schwierigkeit bedeutet und im Detail betrachtet werden muss, bzw. erst eine Methode dafür gefunden werden muss.

Das Schubfachprinzip ist besonders einprägsam, weil es eine handlungsorientierte Vorstellung der Vorgehensweise liefert. Es wird nicht nach bestimmten Regeln umgeformt oder gerechnet, sondern Objekte auf Schubfächer (oder was auch immer man sich dabei vorstellt) verteilt. Eine Visualisierung mit Kartons oder Körben und Zetteln oder Tennisbällen liegt nahe. Trotz dieser handlungsbetonten Anschaulichkeit handelt es sich um ein mathematisches Werkzeug, das etwas sehr Abstraktes kann. Mit dem Schubfachprinzip können Existenzbeweise auch für solche Objekte geführt werden, die nie realisierbar sein werden, wie etwa zwei New Yorker mit der gleichen Anzahl von Haaren auf dem Kopf zu finden (vgl. Kapitel 3). **Der Weg vom handelnden Tun einfacher Grundtätigkeiten zu abstrakt-mathematischen Denkgebilden ist hier kurz und direkt und vor allem ohne größeren Rechen- und Methodenaufwand möglich.**

Gehen Schülerinnen und Schüler eines der ausgewählten Probleme selbständig an, so können sie zunächst auf diese gewohnten Tätigkeiten zurückgreifen, ohne dass von vornherein Vorgaben von Lehrerseite aus gemacht werden müssen. Das erste Herangehen an die Problemlösung kann also voraussetzungsfrei (bezüglich unterrichtlicher Inhalte) geschehen. Im Lauf der Problembearbeitung kommen Fragen auf, die die Grenzen der vertrauten Methoden aufzeigen und die nach mathematischen Methoden verlangen.

Im Rahmen der Bearbeitung des chinesischen Postbotenproblems etwa, stoßen Schülerinnen und Schüler nach einer gewissen Zeit auf die Problematik der Knotengrade.

Sie bemerken, dass ungerade Knotengrade Schwierigkeiten machen und sie begeben sich auf die Suche nach einer allgemeinen Charakterisierung von (von ihnen zu diesem Zeitpunkt nicht so benannten) Eulergraphen. An dieser Stelle geschieht der Übergang vom Experimentieren mit Hilfe bereits bekannter Methoden zum mathematischen Erarbeiten von Resultaten.

Dadurch, dass die einfachen und gewohnten Grundtätigkeiten bis hin zu mathematischen Vermutungen führen können, sind Themen der kombinatorischen Optimierung so gut für einen Unterricht geeignet, der auf selbständiges Entdecken und Erforschen Wert legt.

Ausgehend von diesem eher intuitiven Herangehen kann dann stärker formalisiert werden, und zwar in dem Maß, wie es für die jeweilige Lerngruppe sinnvoll ist. Dies sollte erst zu einem Zeitpunkt geschehen, zu dem bereits eine Vertrautheit mit dem Stoff entstanden ist.

Wendet man sich nun formaleren Methoden zu, um die gefundenen Vermutungen zu beweisen, so kann dennoch weiter an den Erfahrungshorizont der Schülerinnen und Schüler angeknüpft werden, weil die Grundtätigkeiten auch dabei eine Rolle spielen und angewandt werden können. Die Existenz einer Eulertour auf einem Eulergraphen beispielsweise kann algorithmisch bewiesen werden. Es geschieht nicht, dass der Beweis mittels Termumformungen oder Ähnlichem durchgeführt wird, wobei es im Nachhinein schwer ist, den Beweisweg nachzuvollziehen, weil Terme zusammengefasst oder substituiert wurden.[13] Hier bleiben durch das algorithmische Vorgehen alle Einzelschritte sichtbar und nachvollziehbar und sehr oft werden in den Einzelschritten die diskreten Grundtätigkeiten angewandt.[14]

„Es gibt keine Formel“ war an dieser Stelle dann auch ein Schülerinnenkommentar (LK 13), in dem durchaus auch Enttäuschung mitschwang, denn ohne Formel konnte sie sich zunächst keine Methode vorstellen. Die Methode der Verknüpfung von Grundtätigkeiten zu Algorithmen erschließt sich Schülerinnen und Schülern meist sehr schnell und versetzt sie in die Lage eigene Algorithmen zu entwerfen und (umgangssprachlich) niederzuschreiben. Dass der Begriff „Formel“ interpretiert werden kann als ein Werkzeug, das zur Lösung taugt, zeigt die Überschrift eines Schülers (LK 13) über seinen selbst entwickelten Algorithmus: „‚Formel‘ für eine Euler-Tour [...] (Computerfreundlich)“ (siehe Abb. 35 in Kapitel 7).

Das für die gewählten Themen zur Bearbeitung notwendige Methodenrepertoire ist überschaubar und dadurch, dass die diskreten Grundtätigkeiten zum Teil algorithmisch darin verwendet werden und sichtbar bleiben, leicht fasslich. Dies ist ein weiterer Grund für die leichte und schnelle Zugänglichkeit der Themen. Immer wieder müssen die Schülerinnen und Schüler allerdings dazu ermutigt werden, tatsächlich ihre eigenen Ideen und Methoden weiterzuverfolgen und einzusetzen, anstelle mit vorgegebenen Methode zu arbeiten. Der große Vorteil ist, dass

[13] Diese zusammenfassenden Schreibweisen machen zweifellos gerade eine große Stärke der Mathematik aus!

[14] Begibt man sich in den Bereich des Programmierens und der Programmiersprachen, so findet dieses Zusammenfassen und Verkürzen durch die Verwendung von vordefinierten Prozeduren etc. auch statt.

die Lösungen schrittweise gefunden werden können (vgl. Green [26] und Abschnitte 5.2 und 5.8).

Goldin sieht in der Möglichkeit, mit einfachen heuristischen Methoden zu arbeiten, die Chance, Frustrationen zu vermeiden oder sogar zu überwinden und durch den Unterricht in diskreter Mathematik Erfolgserlebnisse zu schaffen (Goldin [25], S. 60, Hervorhebung BLW): „Anticipating the frustration, and channeling it toward the adoption of better or different problem-solving strategies, is within reach if it is taken as an explicit goal of discrete mathematical instruction. In short, we should set out to develop *the affect of success* through discrete mathematics – the pathways and structures whereby previously unsuccessful students come to feel, **I am really somebody when I do mathematics like this!**“

5.6 Schneller Übergang zwischen den Darstellungsebenen / hoher Aufforderungscharakter

Bereits in Kapitel 3 wurde beschrieben, dass Graphen sich durch die Flexibilität in der Darstellung auszeichnen. Für den Unterricht ist dies ein ganz wesentlicher Aspekt. Allein die Tatsache, dass Graphen keine festgelegte Geometrie besitzen, macht sie sehr leicht handhabbar. Beim Zeichnen von Graphen muss zunächst einmal nichts beachtet werden. Exaktes Zeichnen mit Zirkel und Lineal spielt hier keine Rolle. Die Zeichnung eines Graphen ist vielmehr als Skizze anzusehen, die die Struktur sichtbar macht.

Graphen haben einen hohen Aufforderungscharakter. Das liegt zum einen daran, dass sie sehr anschaulich sind, die Struktur ist offensichtlich und nicht kompliziert. Zum anderen ermöglichen sie ein Arbeiten auf verschiedenen Darstellungsebenen. Nach Jerome Bruner werden drei Darstellungsebenen unterschieden: die *enaktive*, die durch handelndes Tun bestimmt ist, die *ikonische*, die das Objekt bildlich darstellt, und die *symbolische*, in der das Objekt abstrakt, durch Symbole, beschrieben ist (vgl. z. B. Stampe [77], S. 63 ff.) In der Mathematik überwiegt meist die symbolische Repräsentationsebene. Für den Lernprozess ist die Einbeziehung aller drei Ebenen eine wichtige Voraussetzung.

„Entscheidend ist aber, daß sich mit ihrer Hilfe theoretische Überlegungen in Aussagen über Ecken, Kanten, Wege übersetzen lassen und damit ikonisch (z. T. sogar enaktiv) faßbar werden.“ ([19], S. 1), so lautet Floers Beobachtung. Und es kann noch hinzugefügt werden, dass auch die symbolische Darstellung (als Matrix z. B.) leicht zu erzeugen und dadurch oft ebenfalls präsent ist (siehe Abb. 9).

So kann auf allen drei Darstellungsebenen gewissermaßen gleichzeitig gearbeitet werden. Zwischen ikonischer und enaktiver Repräsentation kann zum Teil kaum unterschieden werden, wenn auf den gezeichneten Graphen mit Farbstiften hantiert wird. Dennoch bleibt auch die symbolische Ebene präsent. Insbesondere, wenn mit Hilfe einer Software („Visage“ [47]) gearbeitet wird, kann erfahrbar

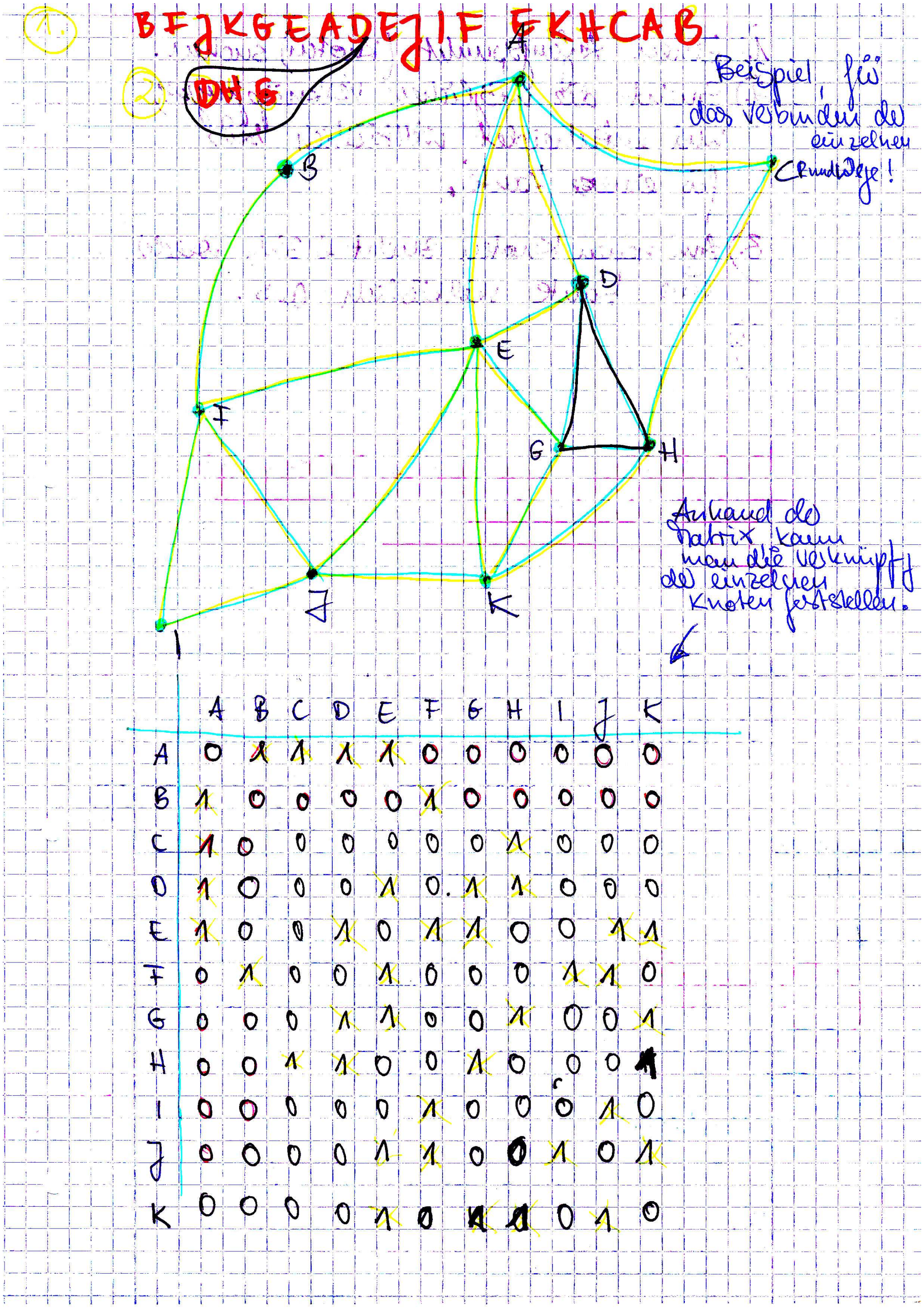


Abbildung 9: Simultanes Arbeiten auf der enaktiven, der ikonischen und der symbolischen Ebene (LK 13).

gemacht werden, dass die Graphenzeichnung geometrisch nicht festgelegt ist, und somit auch einen (quasi) symbolischen Charakter hat. Zusätzlich zeigt „Visage“ die Adjazenzmatrix des Graphen an (siehe Abb. 18 in Kapitel 6). Die ikonische und die symbolische Darstellungsebene sind damit tatsächlich gleichzeitig zu sehen und können auch beide wechselseitig bearbeitet werden.

Der problemlose Wechsel zwischen den Darstellungsebenen wird im Unterricht häufig genutzt, gerade beim Experimentieren mit Algorithmenideen (siehe auch Kapitel 6). Die einfache Übersetzbarkeit von symbolischer zu ikonischer Darstellung ermöglicht es zudem, sich ausgehend von Matrixdarstellungen von Graphen näher mit der Isomorphie von Graphen zu befassen (siehe dazu das Unterrichtsmaterial in Kapitel 8).

5.7 Experimentieren

Die Arbeit mit Graphen eröffnet ein ganz besonderes Experimentierfeld, wie es in der Mathematik selten anzutreffen ist. **Die Struktur von Graphen ist so einfach, dass beim Erstellen von eigenen Beispielen kaum Fehler unterlaufen können.** Die im gewählten Themenkanon zu betrachtenden Graphen müssen nur sehr wenige Voraussetzungen erfüllen. Gelegentlich werden nur einfache Graphen betrachtet (z. B. beim Satz über das mehrfache Vorkommen von Knotengraden) oder Bäume. Werden bestimmte Eigenschaften gesucht, wie etwa die Existenz einer Eulertour, so dienen als Experimentierbeispiele jegliche zusammenhängenden Graphen. Es werden also stets nur sehr wenige und leicht zu überprüfende Voraussetzungen benötigt, so dass Schülerinnen und Schüler ohne Sorge vor falschen Beispielen selbständig eigene Graphen erfinden können, um Vermutungen zu finden oder bestimmten Ideen nachzugehen.

Zwei Zielrichtungen des Experimentierens mit Graphen können unterschieden werden:

- **das Suchen von Eigenschaften** und
- **die Konstruktion von Graphen mit bestimmten Eigenschaften**.

Ein Beispiel für die Suche nach Eigenschaften ist, herauszufinden, unter welchen Bedingungen ein Graph in einem „Zug“ gezeichnet werden kann. Hier zeigen die Notizblätter der Schülerinnen und Schüler (ein Beispiel aus dem Leistungskurs 13 ist in Abb. 10 abgedruckt), wie unterschiedlich an die Frage herangegangen werden kann. Einerseits wurde nach Gegenbeispielen gesucht und diese dann analysiert, andererseits wurde direkt probiert, die gelungenen Beispiele zu charakterisieren. Immer wieder war zu beobachten, dass auch hier die Problemlösetechnik „vom Kleinen zum Größeren“ Verwendung fand (z. B. in Abb. 11).

Ein Beispiel für die Konstruktion von Graphen mit bestimmten Eigenschaften ist die Aufgabe: Zeichne einen Graphen, der genau 5 Knoten mit ungeradem Grad hat.

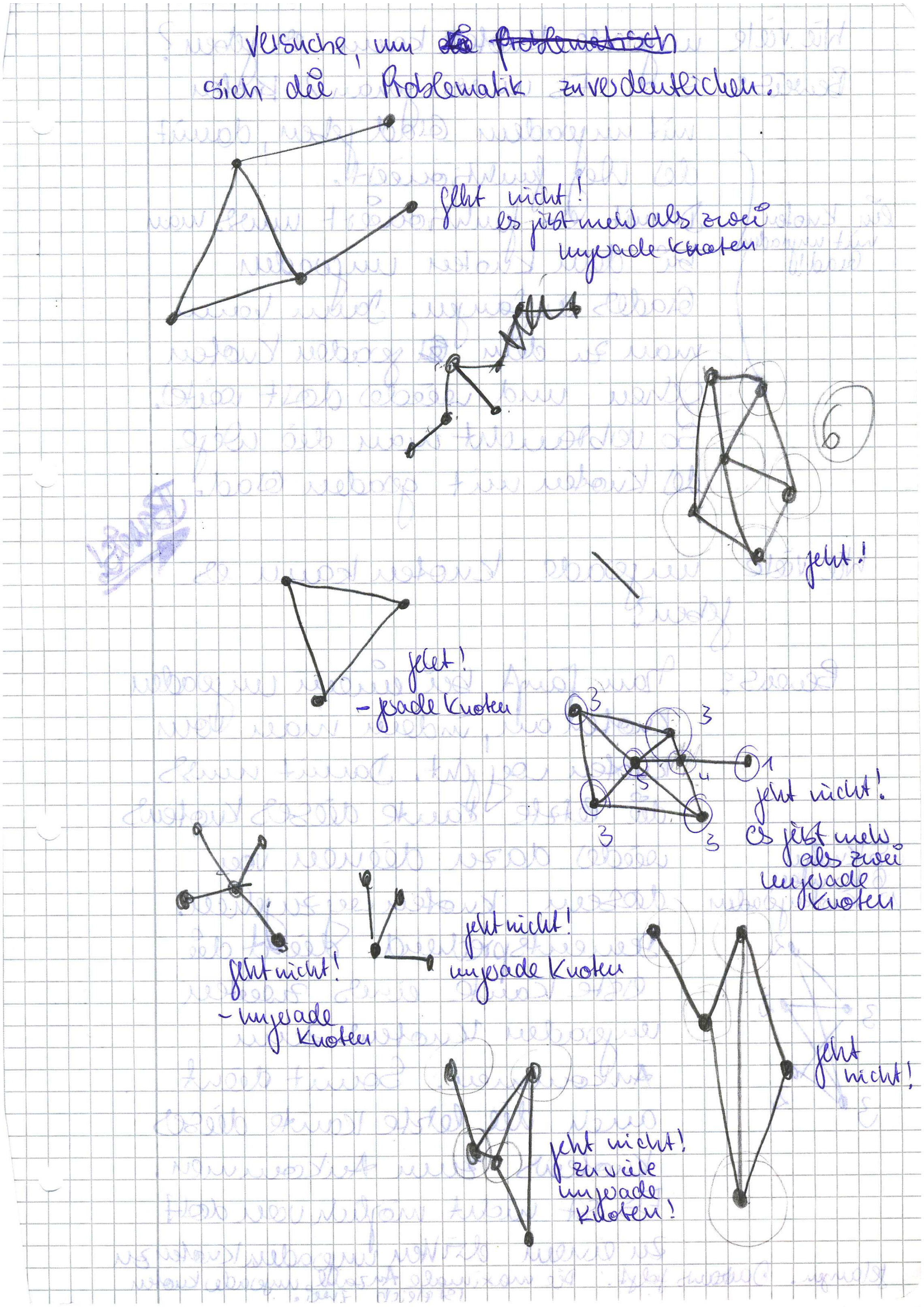


Abbildung 10: Experimente: Wie müssen Graphen aussehen, damit eine Eulertour möglich ist? (LK 13)

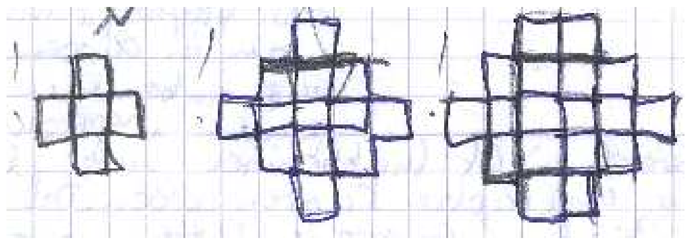


Abbildung 11: Woran liegt es, wenn ein Graph eine Eulertour besitzt? Ausprobieren vom Kleineren zum Größeren (LK 13).

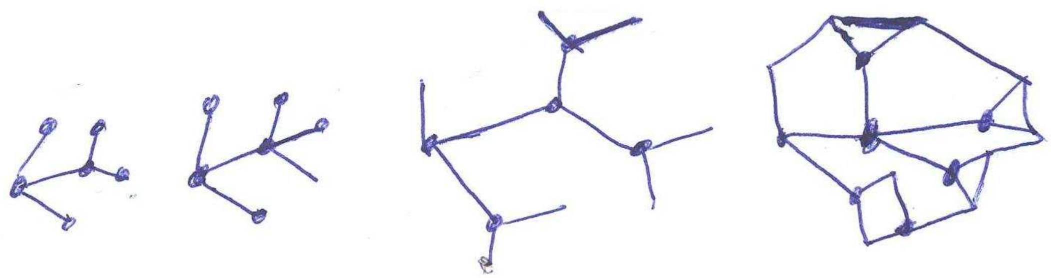


Abbildung 12: Skizzenblatt eines Schülers: Auf der Suche nach einem Graphen mit genau fünf Knoten mit ungeradem Grad (Klasse 11).

An dieser Aufgabe wird **das schrittweise, induktive Vorgehen** besonders gut deutlich. Schülerskizzen (LK 13), die den Lösungsweg dokumentieren, zeigen dies (siehe Abb. 12).

Typisch für erste Lösungsversuche ist, dass der gezeichnete Graph immer weiter wächst. Meist wird zunächst ein Knoten hinzugefügt, dann häufig immer mehr Kanten und an den Enden dieser Kanten auch nochmals Knoten. Der Graph wird zu „reparieren“ versucht. Das heißt, zunächst wird nach einer Konstruktion gesucht, die die gesuchte Eigenschaft des Graphen erzeugt. Es stellt sich schnell heraus, dass es „irgendwie nicht geht“. Nun kommt der anspruchsvollere Teil, nämlich zu zeigen, dass es nicht gehen kann. Hier hilft die bereits gewonnene Erfahrung weiter. Was passiert denn, wenn eine neue Kante hinzukommt? Wie verändern sich die Knotengrade des Graphen? Welche unterschiedlichen Fälle gibt es? So wird mittels Fallunterscheidung der Beweis gefunden (hinter dem eigentlich eine vollständige Induktion steckt).

Die Konstruktion von Graphen mit bestimmten Eigenschaften kann noch eine andere Zielrichtung haben, etwa die Suche nach „Worst-Case-Beispielen“ oder Beispielen, die Eigenschaften von Algorithmen verdeutlichen. Es ist beispielsweise sehr schwierig, im Rahmen der Bearbeitung des TSP gute und nicht zu große Beispielgraphen zu finden, die bei der Anwendung verschiedener TSP-Heuristiken interessante unterschiedliche Ergebnisse liefern (ein sehr schönes Beispiel ist in Grötschel [30]). Das Experimentieren mit unterschiedlichen Kantengewichten und Heuristiken

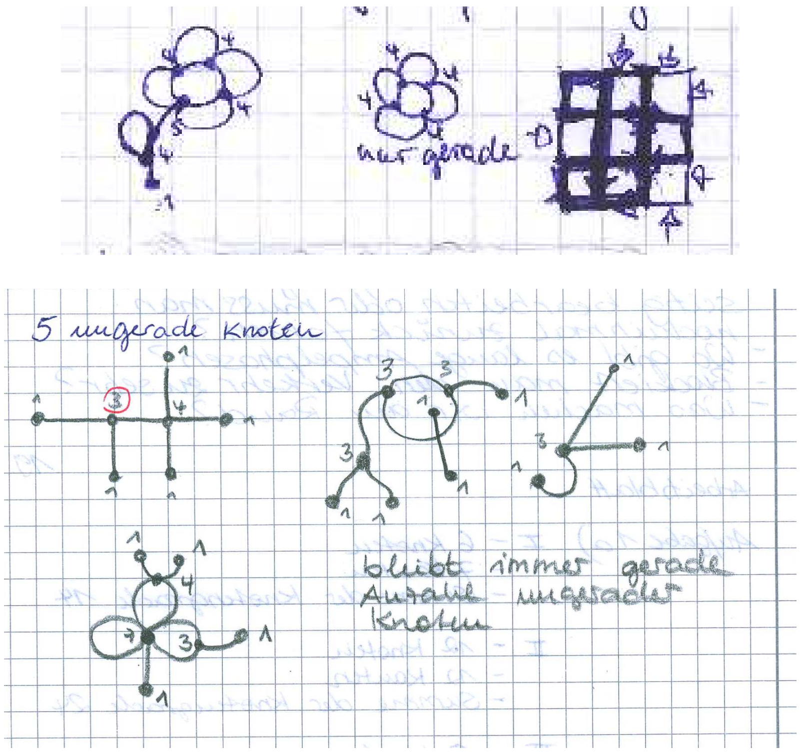


Abbildung 13: Das Experimentieren mit Graphen lässt individuelle Ausdrucksformen zu (LK 13).

erzeugt ein sehr detailliertes Verständnis der Funktionsweisen der Heuristiken und gibt eine Ahnung davon, dass die Anzahl der verschiedenen Hamiltonkreise in einem vollständigen Graphen ungeheuer groß ist. Hier kann die kombinatorische Explosion handelnd erlebt werden.

Beim Experimentieren mit Graphen erarbeiten sich die Schülerinnen und Schüler einige Fertigkeiten, die für das Argumentieren und Beweisen im Rahmen der Graphentheorie benötigt werden. Wichtig ist dabei, dass ihnen bewusst wird, dass die aus eigenem Nachdenken und Probieren entstandenen Fertigkeiten bereits elementare mathematische Methoden sind. Dieses Vertrauen in die eigene mathematische Schöpferkraft müssen viele Schülerinnen und Schüler oft erst wiedergewinnen. Zu sehr sind sie daran gewöhnt, dass erst das, was die Lehrkraft sagt, richtig ist und ihre eigenen Ideen nur als Stichworte für einen vorab geplanten Unterrichtsablauf dienen.

Noch ein weiterer Aspekt des Arbeitens mit selbst generierten Beispielen zeigt sich im Unterricht: Dadurch, dass Graphen keine vorgegebene Geometrie haben, eröffnen sich hier **individuelle Gestaltungsmöglichkeiten**, die insbesondere von Mädchen kreativ genutzt werden. Hier ergibt sich die seltene Möglichkeit, beim Arbeiten mit mathematischen Objekten individuelle Ausdrucksformen zu entwickeln (siehe Abb. 13).

.

5.8 Modellieren im Unterricht

Die mathematische Modellierung ist der erste Schritt im Problemlöseprozess für angewandte Aufgaben. Bezüglich der von uns gewählten Problemstellungen, aber durchaus nicht generell, gilt: **Die Modellierung für die gewählten Probleme ist meist unaufwändig, der Abstraktionsschritt dennoch nicht unerheblich.**[15] Der Übergang vom konkreten Objekt (das meist auch schon ein Modell ist, etwa ein Stadtplan oder ein Liniennetzplan) zum Graphen, der nichts anderes als eine zweistellige Relation ist, bedeutet eine nicht-triviale mathematische Denkleistung.

Eine Hilfe dabei ist, auf den vorhandenen Stadtplanausschnitt oder das im jeweiligen Fall vorliegende Material eine Folie zu legen und auf dieser Folie den Graphen zu zeichnen. Wird die Folie mit dem Graphen von der Vorlage heruntergenommen, so werden Realmodell und mathematisches Modell voneinander getrennt. Mit dieser Methode (siehe dazu auch Kapitel 6, Abschnitt 6.1.4) wird zusätzlich ermöglicht, mittels mehrerer Folien verschiedene Modellierungstiefen (beispielsweise im Falle von Straßennetzen, vgl. auch den Abschnitt „Modellieren“ in Kapitel 3) auszuprobieren und zu dokumentieren. Der Stadtplan bleibt „sauber“ und dadurch auch im weiteren Verlauf des Unterrichts nutzbar.

Die Modellierung und mathematische Lösungsfindung ist ein spiralförmiger Prozess, in dem der Weg von der Anwendung in die Theorie und zurück zur Anwendung (Modellierungskreislauf[16]) schrittweise zur Verfeinerung des Modells führt, bzw. zur kritischen Überprüfung der gewählten mathematischen Methoden und der durch sie produzierten Lösungen. Dieser Prozess wird gerade dann deutlich sichtbar, wenn mit Folien gearbeitet wird. Es kann im Verlauf der Erarbeitung immer wieder sinnvoll sein, die Folie wieder auf den Stadtplan zurückzulegen, um die gefundenen Lösungen dort anzusehen und zu überprüfen, um dann wieder auf dem Graphen weiterzuarbeiten. **Die stetige Vergewisserung, dass das, was man mathematisch tut, auch in der Realität sinnvoll ist, gibt eine wichtige Rückkopplung für die Lernenden.**

Dabei kann es auch vorkommen, dass das Modell für unterschiedliche Teilschritte der Lösung umgearbeitet werden muss. Für das Postbotenproblem werden auf demselben Graphen zwei Kantengewichtungen benötigt: eine für die Wegzeiten mit Austeilen der Post und eine für die Wegzeiten, wenn die Strecke nur abgelaufen wird, ohne dabei Post zu verteilen. Später stellt es sich heraus, dass die Optimierung nur auf dem Graphen mit den Wegzeiten ohne Postausteilen geschieht und daher der andere Graph nicht sehr wichtig ist. Das aber wird erst im Lauf des Erkundungsprozesses deutlich.

Der Blick vom Modell in die Realität muss nicht unbedingt immer nur das Ausgangsproblem betreffen. Nach abgeschlossener Modellierung, also wenn ein Graph vorliegt, an dem dann weitergearbeitet wird, kann es durchaus sein, dass andere

[15] Hier ist mit „Modellierung“ das Finden einer geeigneten mathematischen Darstellung gemeint und nicht der gesamte Lösungsprozess für ein angewandtes Problem.

[16] zu verschiedenen Phasenbeschreibungen des Modellbildungsprozesses siehe z. B. Jablonka [39], S. 17 ff.

passende Realsituationen hinzukommen. **Es spielt dann keine Rolle mehr, ob der Postbote unterwegs ist oder die Müllabfuhr, ob etwas verteilt oder eingesammelt werden soll, oder ob Touristen durch ein Museum geführt werden sollen. Damit zeigt sich die Universalität mathematischer Darstellung.** Dieses Erlebnis kann sich auch im Klassenraum einstellen, wenn an zunächst scheinbar verschiedenen Aufgaben gearbeitet wird, von denen sich dann herausstellt, dass sie dieselbe mathematische Lösung besitzen. Solche unterschiedliche Aufgabenstellungen finden sich zu Beginn der Buchkapitel (Kapitel 8, bzw. [55], [56], [57]).

Umgekehrt kann es sehr überraschend sein, wenn die Modellierung für zwei sehr ähnliche Problemstellungen wie die Optimierung des Weges für die Müllabfuhr bzw. für die Briefzustellung äußerst unterschiedlich ausfällt und die Lösungswege erst nach beendeter Modellierung wieder parallel laufen (siehe dazu auch Kapitel 7).

Modellieren mit Graphen heißt, Entscheidungen zu treffen (vgl. auch Kapitel 3). Einen Knoten zu setzen bedeutet, eine Stelle gefunden zu haben, an der es eine Entscheidungsmöglichkeit gibt. Es muss dabei entschieden werden, wie detailliert das Modell werden soll, es müssen Lösungen für den Umgang mit Kartenrändern von Stadtplanausschnitten oder mit Umsteigebahnhöfen getroffen werden, für den Umgang mit Wartezeiten für Linksabbieger etc.

Diese Entscheidungen im Verlauf des Modellierungsprozesses spielen sich in einem klar abgesteckten Rahmen und vor allem innerhalb des Erfahrungshorizontes von Schülerinnen und Schülern ab. Wird als Stadtplanausschnitt die Umgebung der Schule gewählt, um beispielsweise das chinesische Postbotenproblem zu bearbeiten, so werden viele der Fragen durch vorhandenes Wissen beantwortet. Kann man zwischen den Häusern durchgehen, um in die Parallelstraße zu gelangen? Ist die Sackgasse breit genug, so dass das Müllauto dort wenden kann? Gibt es Briefkästen am Friedhof? **Viele der Fragen knüpfen an einen großen Fundus von Alltagswissen an und können bearbeitet werden, ohne dass zusätzliche Daten vorliegen müssen. Das ist ein großer Vorteil für die unterrichtspraktische Umsetzung.**

5.9 Algorithmisches Vorgehen

Algorithmisches Vorgehen ist den Schülerinnen und Schülern aus dem Mathematikunterricht bekannt, allerdings überwiegend in der Form, dass sie bestimmte Rechenvorschriften an neuen Beispielen durchexerzieren. Dabei wird selten deutlich gemacht, dass es sich dabei um Algorithmen handelt, und noch seltener werden sie konkret als Schritt-für-Schritt-Anweisungen aufgeschrieben oder präsentiert.

Im Rahmen eines authentischen Mathematikunterrichts über kombinatorische Optimierung wird das algorithmische Arbeiten vollkommen anders in den Unterricht eingebunden. **Algorithmen zu erfinden und (umgangssprachlich) sauber niederzuschreiben ist ein wesentlicher Bestandteil des Erarbeitungspro-**

zesses. Dabei kommen zwei Aspekte positiv zum Tragen: das Schritt-für-Schritt-Arbeiten, das durch die diskreten Strukturen induziert wird (vgl. Kapitel 3) und die alltagsnahen diskreten Grundtätigkeiten.

Die Ideen für den Ablauf von bestimmten Algorithmen entstehen durch das Experimentieren auf Graphen, und zwar auf konkret gezeichneten Graphen. Mit Farbstiften und ggf. einem Daumenkino (siehe Kapitel 6) können Abläufe von Algorithmen sichtbar gemacht werden und es kann anhand von diesen Bildern über die grundsätzlichen Vorgehensweisen nachgedacht werden. Besonders bei der Breitensuche ist die visuelle Darstellung eine große Hilfe, da das Explorieren der nächsten Ebene gewissermaßen in alle Richtungen gleichzeitig erfolgt. Dieser Vorgang ist in der bildlichen Darstellung leicht zu verstehen und gut einprägsam. Ihn in passende Anweisungen zu verpacken bedeutet insbesondere für jüngere Schülerinnen und Schüler der Mittelstufe eine hohe Anforderung. **Das Aufteilen in einzelne Arbeitsschritte ist eine analytische Denkleistung.**

Die Aufteilung in Einzelschritte macht oft Schwierigkeiten, weil vieles unbewusst geschieht. Es geht im Erarbeitungsprozess dann auch häufig darum, was als einzelner Schritt angesehen wird und an welchen Stellen zusammengefasst werden kann. Auch Schleifen im Ablauf der Algorithmen werden zunächst leicht übersehen. **Die Einzelschritte bestehen aus einfachen diskreten Grundtätigkeiten** wie Auswählen, Zählen oder Sortieren **bzw. aus organisatorischen Handlungen** wie Markieren oder in Datenstrukturen oder Variablenlisten eintragen.

Diese Einzelschritte bleiben auch später noch sichtbar, weil sie sich nicht in Formeln zusammenfassen lassen, sondern algorithmisch aufgeschrieben werden (vgl. Kapitel 3). Methoden zur Überwindung der Schwierigkeiten beim Finden der Einzelschritte und beim Aufschreiben der Algorithmen sind in Kapitel 6 beschrieben.

Andererseits ist das Schritt-für-Schritt-Arbeiten auch ein natürliches Vorgehen bei der Arbeit mit Graphen. Wenn Schülerinnen und Schüler auf einem Graphen beispielsweise einen kürzesten Weg suchen, so arbeiten sie sich von vornherein schrittweise vor. Nur selten sind optimale Wege sofort als Ganzes zu erkennen. Wird mit der Lochblende gearbeitet (siehe Kapitel 6), so wird dadurch das schrittweise Konstruieren von Wegen noch deutlicher als Notwendigkeit sichtbar. Dennoch muss das schrittweise Vorgehen erst bewusst gemacht werden. Insbesondere erwarten viele Schüler, dass sich daraus später noch eine Formel ergibt (vgl. Abschnitt 5.4) und nehmen deshalb das schrittweise Vorgehen nicht sofort als mathematische Methode wahr.

Die Zielrichtung, einem Computer beizubringen, wie er bestimmte Objekte auf Graphen konstruiert, hilft nicht nur als Motivation für diese Form des Aufschreibens von Tätigkeiten. Sie zeigt auch ganz deutlich, dass **Mathematik als Prozess** begriffen werden kann.

Unabhängig von der konkreten Aufgabenstellung hilft das Erfinden und Formulieren von Algorithmen, einige prozessbezogene mathematische Kompetenzen zu fördern.

Die Abstraktion vom konkreten Beispiel wird benötigt, die präzise Analyse von Tätigkeiten, die Priorisierung von Tätigkeiten, das Erkennen von sich wiederholenden Elementen und vieles mehr. Darum bieten sich solche Aufgabenstellungen besonders für einen kompetenzorientierten Unterricht an.

Die **Greedy-Methoden**, die in verschiedenen Algorithmen zur Anwendung kommen, entsprechen intuitiven Herangehensweisen und sind daher in zweierlei Hinsicht für den Unterricht hilfreich. In der Mittelstufe ist dies ein weiterer Punkt, der die leichte Zugänglichkeit begründet. Die spontan selbst erdachte Strategie beispielsweise zur Konstruktion minimaler aufspannender Bäume führt bereits zum Ziel. **Es ist für die Lösung des Problems nicht notwendig, im Unterricht komplizierte Methoden zu erlernen, sondern es kann mit den eigenen Ideen weitergearbeitet werden.**

Genau in diesem Punkt entsteht in der Oberstufe ein Beweisbedürfnis, während Mittelstufenschüler dies einfach hinnehmen (und damit gelegentlich den Stoff unterschätzen, siehe Kapitel 7). Die Korrektheitsbeweise für diese „einfachen“ Algorithmen sind auch für Oberstufenschüler noch sehr anspruchsvoll (s. u.).

5.10 Argumentieren und Beweisbedürftigkeit

Argumentieren ist ein wesentlicher Teil des mathematischen Lösungsprozesses. Die deutschen Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss erläutern, welche Kompetenzen sie unter Argumentieren fassen ([75], S. 8):

- Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es. . . ?“, „Wie verändert sich. . . ?“, „Ist das immer so. . . ?“) und Vermutungen begründet äußern,
- mathematische Argumentationen entwickeln (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise),
- Lösungswege beschreiben und begründen.

Das schrittweise Vorgehen, das die Arbeit mit Graphen häufig mit sich bringt (s. o.), hilft, Argumentationsketten zu entwickeln und zu formulieren. Der einfache Wechsel zwischen den Darstellungsebenen begünstigt den Schritt von visuell erarbeiteten Ideen zu formaleren Argumentationen. Der hohe Aufforderungscharakter von Graphen erleichtert den Einstieg in das Experimentieren und Argumentieren. Denkwege können anhand von Skizzen veranschaulicht werden und so Diskussionsgrundlagen für gemeinsames Nachdenken geschaffen werden.[17]

Dadurch, dass beim Experimentieren mit Graphen die mathematischen Vermutungen auf jeweils individuell verschiedenen, selbst erzeugten Beispielen beruhen, entsteht eine Beweisbedürftigkeit. Da jede/r einzelne einen

[17] Vgl. die Definition von „Argumentation“ bei Hefendehl-Hebeker und Hußmann [34], die den kommunikativen Aspekt besonders hervorhebt.

individuellen Weg zur Vermutung gegangen ist, muss die Allgemeingültigkeit der gefundenen Gesetzmäßigkeiten erst bewiesen werden. Die beim Experimentieren gewonnenen Fertigkeiten im Umgang mit Graphen helfen beim selbständigen Argumentieren.

Eine Fußnote aus Lovász/Pelikán/Vesztergombi ([49], S. 165) zeigt einen weiteren Aspekt des Arbeitens mit Graphen auf: „Wir haben diesen Beweis vielleicht detaillierter als nötig angegeben. Man sollte sich jedoch bewußt darüber sein, dass man bei Beweisen zu Wegen und Kreisen leicht Bilder zeichnen kann (auf dem Papier oder im Geiste), in denen implizit Annahmen gemacht werden, die letztlich irreführend sind. Wenn man beispielsweise zwei Wege miteinander verknüpft, stellt man sich zuerst einen einzigen (längeren) Weg vor, was jedoch nicht der Fall sein muss.“

Charakteristisch für die Arbeit mit Graphen ist, dass so manche Dinge offensichtlich erscheinen. Gerade das ist einer der Gründe für die leichte Zugänglichkeit. In sehr vielen Fällen führt eine intuitive Herangehensweise zum Ziel oder zumindest sehr weit. Greedy-Algorithmen sind aus diesem Grunde besonders für den Mittelstufenunterricht geeignet.

Anschaulich und intuitiv plausibel erscheinende Argumentationen und Lösungsmethoden, die an mehreren Beispielen ausprobiert wurden, werden von Schülerinnen und Schülern oft auch ohne Beweis als richtig akzeptiert. Es stellt eine hohe Anforderung an das Abstraktionsvermögen und die Argumentierfähigkeit dar, hinter solchen Offensichtlichkeiten die implizit, also unbewusst gemachten Annahmen zu erkennen und dann eine Allgemeinheit zu erringen. Mit dem Erkennen und Überwinden dieser Schwierigkeit der Arbeit mit Graphen, lernen die Schülerinnen und Schüler wichtige mathematische Tätigkeiten kennen: die penible Analyse der gemachten Annahmen und das präzise Argumentieren, um Vermutungen zu beweisen. Dabei ist nicht selten eine behutsame Hilfestellung durch die Lehrkräfte notwendig.

Freudenthal schlägt in diesem Zusammenhang vor ([22], S. 94): „[...] daß man nicht dem Schüler geschniegelte und gebügelte Beweise vorsetzte, sondern ihn rohe Beweise finden ließe, die er dann auch noch mit dem letzten Schliff versehen müßte. Mit dieser Tätigkeit käme er über das lokale Problemlösen hinaus zu einem ersten Ansatz selbständiger Systembildung in der Mathematik.“

Im Rahmen der von uns gewählten graphentheoretischen Probleme kann tatsächlich so verfahren werden. **Eine Sonderstellung nehmen die Korrektheitsbeweise für Algorithmen ein. Das Beweisbedürfnis entsteht nicht ohne Weiteres aus dem handelnden Umgang heraus.** Wurde eine Formulierung für einen selbst erfundenen Algorithmus gefunden (ggf. mit Hilfe der in Kapitel 6 beschrieben Methoden) und der Algorithmus erzeugt augenscheinlich richtige Lösungen, so kommen Schülerinnen und Schüler nicht unbedingt auf die Idee, dass dort etwas zu beweisen sei.

Ein Problem für die unterrichtliche Erarbeitung liegt zudem darin, dass diese Korrektheitsbeweise meist nicht im zeitlichen Rahmen des Unterrichts von den Lernenden selbst erfunden werden können. Das kommt daher, dass diese Beweise meist mittels vollständiger Induktion geführt werden und oft zusätzlich als Widerspruchsbeweis. Es ist aber im Rahmen des Unterrichts durchaus denkbar, verständlich aufgeschriebene Beweise nachzuvollziehen oder aber einzelne Argumentationsschritte mit den Schülerinnen und Schülern zu erarbeiten.

5.11 Offene Probleme

Bei der unterrichtlichen Erforschung von Themen der kombinatorischen Optimierung kommen an verschiedenen Stellen Fragen auf, die zu den offenen Problemen der Mathematik gehören. Es ist dies beispielsweise die Frage, ob es für das Travelling-Salesman-Problem effiziente Algorithmen geben kann (was auf die $\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$-Problematik führt, siehe dazu Grötschel [29]) oder die Frage nach einem Kriterienkatalog zur Überprüfung von Graphenisomorphien.

Die kombinatorische Optimierung zeichnet sich dadurch aus, dass sie offene Probleme besitzt, die allgemeinverständlich formuliert werden können. Schülerinnen und Schüler stoßen oft selbst auf diese Fragen. So einfach, wie sie zu finden und zu formulieren sind, so schwer ist es darzustellen, woran es liegt, dass die Lösung so schwer zu finden ist. An dieser Stelle hören die Möglichkeiten der eigenen Erarbeitung durch Schüler auf und muss auf einen Lehrervortrag oder ein Schülerreferat anhand geeigneter Texte, z. B. Grötschels Kapitel über das $\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$-Problem [29] oder Gritzmann/Brandenberg [27] zurückgegriffen werden.

Ein wichtiges Anliegen eines authentischen Mathematikunterrichts ist gerade dieser Kontakt zu offenen Forschungsfragen, um zu zeigen, dass Mathematik eine äußerst lebendige Wissenschaft ist und weit davon entfernt, bereits alles erforscht zu haben.

5.12 Fazit: Authentisch Mathematik treiben mit Kombinatorischer Optimierung

Die in diesem Kapitel dargestellten Überlegungen und Erfahrungen zeigen, dass die kombinatorische Optimierung in vielerlei Hinsicht für einen authentischen Mathematikunterricht geeignet ist. Neben der **leichten Zugänglichkeit** ist es vor allem **die Charakteristik der mathematischen Methoden**, die das Themengebiet auszeichnet.

Es ergibt sich eine für den Unterricht **ideale Kombination** aus

- Anwendung,
- Realitätsbezug,
- experimentierfreundlichen Strukturen,
- mathematischen Methoden, die aus alltäglichen Grundtätigkeiten heraus entwickelt werden können, und
- einer Variationsbreite des Niveaus

und damit die **Möglichkeit zum selbständigen Erarbeiten**.

Dabei erschließt sich ein **modernes mathematisches Fachgebiet**, das u. a. mit **algorithmischen Methoden** arbeitet, und in dem es **verständliche offene Fragen** gibt.

Sowohl der Inhalt als auch die möglichen Herangehensweisen lassen einen entdeckenden genetisch strukturierten Unterricht zu, in dem authentische Begegnungen mit Mathematik stattfinden können.

Die hier herausgearbeiteten Thesen werden von Aussagen einiger anderer Autoren über unterschiedliche Teilgebiete der diskreten Mathematik als Unterrichtsstoff unterstützt. Eine besonders schöne Äußerung stammt von Eric W. Hart ([32], S. 77, Hervorhebung: BLW):

> „The overall conclusion can only be that discrete mathematics is an exciting and necessary addition to the secondary school curriculum; **so let's teach it and enjoy it!**“

6 Spezielle Unterrichtsmethoden für die kombinatorische Optimierung

Basierend auf der Analyse des didaktischen Potenzials der gewählten Themen aus der kombinatorischen Optimierung wurden Unterrichtsmethoden entwickelt und praktisch erprobt, die helfen können, authentische Begegnungen mit der Mathematik zu fördern. Vorteile und Schwierigkeiten im Umgang mit der Thematik werden dabei produktiv genutzt.

6.1 Mit Graphen arbeiten

Das Arbeiten mit Graphen kann in verschiedener Hinsicht unterstützt werden. Die folgenden Methoden und Medien heben **verschiedene Aspekte des Arbeitens mit Graphen** hervor:

- die hohe Experimentierfreundlichkeit,
- das lokale Arbeiten, das durch die diskrete Struktur bedingt ist,
- die flexible Darstellung ohne geometrische Festlegung,
- den Übergang vom Realmodell zum mathematischen Modell.

6.1.1 Das Graphenlabor

Die enorme Experimentierfreundlichkeit von Graphen ist einer der wichtigsten Aspekte, die es ermöglichen, mit kombinatorischer Optimierung einen Unterricht mit hohem Anteil an Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler zu gestalten. Das selbständige Generieren von selbst erdachten Beispielen ist eine wichtige Komponente innerhalb des Unterrichts, um zu Vermutungen und Beweisen zu gelangen, aber auch, um algorithmische Ideen ausprobieren und überprüfen zu können.

Als Metapher für dieses freie Experimentieren mit Graphen wurde das **Graphenlabor** gewählt. Diese Bezeichnung soll Assoziationen an Alchemistenküchen wecken, in denen so lange kreativ experimentiert wird, bis die gewünschte Substanz erscheint. Nicht gemeint ist hingegen das Nachmachen von vorgeschriebenen Experimenten. Wie kann diese Vorstellung des freien Experimentierens im Klassenzimmer manifest gemacht werden?

Es ist insbesondere bei einem Unterricht, der geführte und freie Arbeitsphasen mischt, möglich, verbindliche Phasen der Arbeit im Graphenlabor einzuführen. Die Dauer solcher Laborphasen hängt von der Aufgabenstellung ab. Sie kann von der Bearbeitung einzelner relativ eng gefasster Experimentieraufgaben wie der Bestimmung der Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad bis hin zu weit tragenden Aufgabenstellungen reichen. Solch eine größere Aufgabe könnte sein, (U-Bahn-)Streckennetze zu

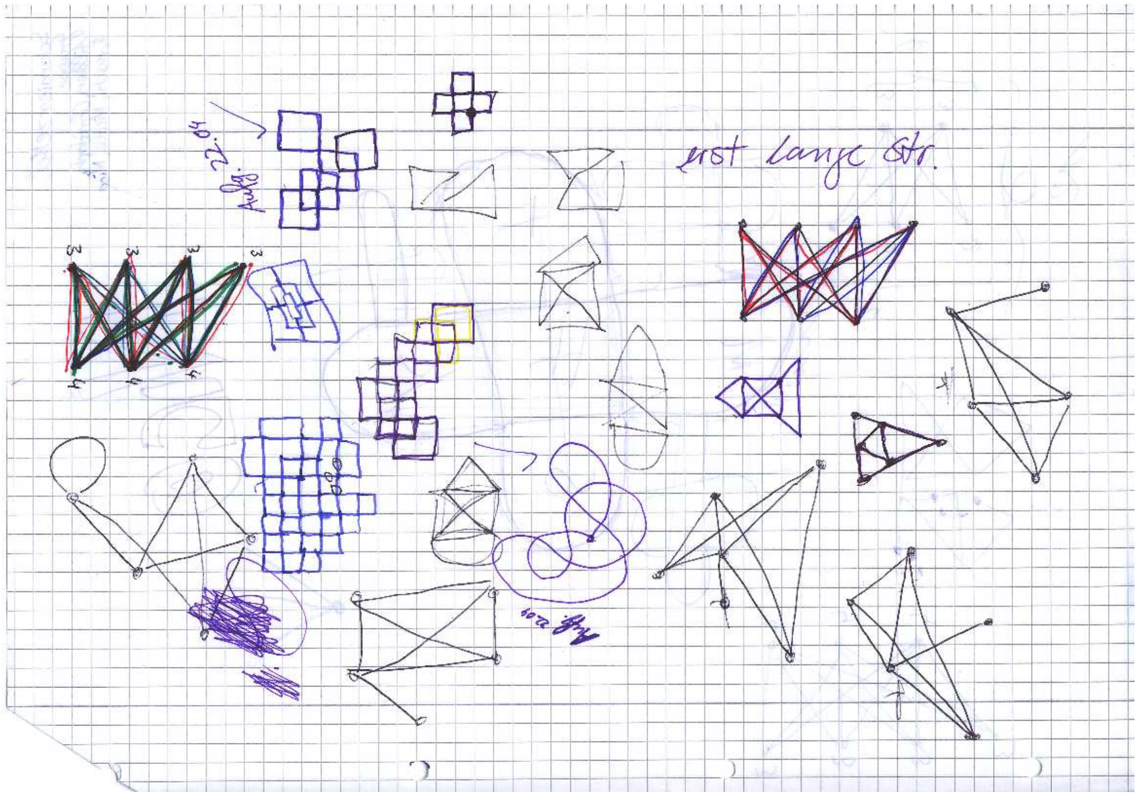


Abbildung 14: Aus dem Graphenlabor: auf der Suche nach dem Eulerkriterium.

entwerfen, die verschiedenen selbstgewählten Anforderungen entsprechen, beispielsweise maximal zwei Mal Umsteigen zwischen je zwei Stationen (vgl. auch Buchseite 9 in Kapitel 8. Wichtig ist eine Dokumentation der Erarbeitung sowohl durch Skizzenblätter als auch in Lerntagebüchern.

In einem Unterricht, der über weite Strecken auf selbständiger Arbeit der Schülerinnen und Schüler basiert, können solche Phasen nicht so leicht identifiziert werden. Aber sie können bewusst gemacht werden durch bestimmte Dokumentationsformen. Es kann ein extra Hefter mit den Labor-Skizzenblättern angelegt werden, zu denen „Versuchsbeschreibungen“ verfasst werden. Noch schöner und für die ganze Klasse besser zugänglich wäre eine Galerie an der Wand, wo die Versuchsergebnisse ausgehängt werden, so dass die Möglichkeit besteht, auf den Ergebnissen von anderen aufzubauen oder gemeinsam weiter zu experimentieren.

6.1.2 Die Froschperspektive und die Lochblende

Eine der größten Schwierigkeiten bei der Arbeit mit Graphen, insbesondere beim Erfinden von Algorithmen, ist, vom Gesamtblick auf den Graphen zu abstrahieren. Liegt ein gezeichneter Graph vor, so findet das Auge häufig recht schnell z. B. einen minimalen aufspannenden Baum. Kanten werden mit dem Stift eingefärbt und

Kreise gleich von vornherein vermieden. Grundideen für Algorithmen werden auch von jüngeren Schülerinnen und Schülern (meine Erfahrungen reichen bis hinunter zur Klassenstufe 8) problemlos auf intuitive Art und Weise visuell gefunden. Gerade darin liegt ja auch die Stärke der Arbeit mit Graphen: Zunächst können die benötigten Ideen direkt am Beispielgraphen entwickelt werden.

Beim Finden von Beweisen, aber vor allem beim Formalisieren von Algorithmen muss dann der Schritt weg vom Beispiel (bzw. vielen Beispielen) hin zur Verallgemeinerung passieren. Das fällt hier besonders schwer, da die visuelle Darstellungsform bei Graphen sehr präsent ist, anders als bei der Arbeit mit Funktionen z. B., wo überwiegend mit dem Funktionsterm hantiert wird und der Funktionsgraph oft erst nach einigem Rechnen gezeichnet werden kann.

Einer der großen Vorteile der Arbeit mit Graphen, nämlich, dass ein visuelles, intuitives Herangehen gefördert wird (vgl. Kapitel 5), das kreatives Forschen befördert, kehrt sich in dem Moment, in dem es um Formalisierung geht, zunächst ins Gegenteil um. Schuster [74] schreibt im Rahmen einer Analyse der Vorgehensweise beim Finden von Algorithmen für minimale aufspannende Bäume: „Im Lernvorgang müssen konkrete Tätigkeiten zu Handlungsmustern idealisiert werden, um sich von den Besonderheiten des konkreten Falls zu lösen und den Algorithmus als systematisches Verfahren bewusst wahrzunehmen. Eine Vorgehensweise am konkreten Material, die selbstverständlich wirkt, steht aber diesem Bewusstwerden entgegen, da sie nicht explizit und die Vorgehensweise reflektierend konstruiert werden muss, sondern lediglich die Fortsetzung eines aus dem sonstigen Leben bekannten unbewussten heuristischen Musters auf eine neue Situation darstellt.“ ([74], S. 152) „Diese „Offensichtlichkeit“ der Strategie unterbindet im Lernprozess leicht jede Reflexion über das Verfahren als Handlungsmuster und die Frage nach der Korrektheit des Ergebnisses. Naive Vorstellungen von Selbstverständlichkeit stellen hier also ein Lernhemmnis dar.“ ([74], S. 153)

Ein wichtiges Ziel im Unterricht über kombinatorische Optimierung ist daher, den Abstraktionsschritt vom handelnden Tun im konkreten Graphen zum formalisierten Algorithmus oder Beweis zu ermöglichen und zu erleichtern. Erst auf der abstrakten Ebene kann dann auch ein Fehlerbewusstsein erwachsen. Denn am konkreten Beispiel klappt es ja offensichtlich, was man macht. In allgemeinerer Darstellung aber entsteht eine Beweisbedürftigkeit.

Wie also kann dieser Schritt von Lösungs- oder Beweisstrategien, die an konkreten Graphen gefunden wurden, hin zu einer verallgemeinerten Form unterstützt werden? Dafür muss man sich zunächst klarmachen, wie auf Graphen konstruiert und argumentiert wird. An dieser Stelle kommen die Unterschiede zwischen Methoden der diskreten und der kontinuierlichen Mathematik sehr deutlich zum Tragen. Bei Graphen kann nicht vom Verhalten an einer Stelle auf den Rest geschlossen werden, oder jedenfalls nicht im Allgemeinen. Der Grad eines Knotens sagt nichts aus über den Grad der ggf. vorhandenen Nachbarknoten. Dass ein Knoten Nachbarn hat, besagt gar nichts darüber, ob auch alle anderen Knoten Nachbarn haben oder

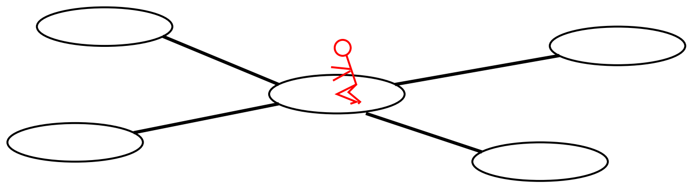


Abbildung 15: Die Froschperspektive.

ob der Graph zusammenhängend ist. Das algorithmische Denken läuft ebenso wie Argumentationen auf Graphen in kleinen Schritten ab. Vorgehensweisen müssen in kleine Operationen zergliedert werden und (darin liegt die Kunst) so hintereinandergeschaltet werden, dass am Ende tatsächlich das geplante Ergebnis herauskommt (vgl. dazu Kapitel 3).

Auch für einfache Begriffsbildungen wie „Kreis“ ist es wichtig, den Blick von der geometrisch festgelegten Zeichnung zu lösen. Schuster schreibt dazu: „Als Konsequenz [aus der Analyse eines Transkriptes eines Unterrichtsgesprächs, *Anm. BLW*] für ein Unterrichtsdesign ergibt sich die Notwendigkeit, die Form der geometrischen Repräsentation zurückzudrängen.“ ([74], S. 214)

Um den Blick vom Gesamtgraphen zu lösen, eignet sich die Vorstellung der **Froschperspektive**. Sie kann konkret im Schulhof visualisiert werden, indem dort ein sehr großer Graph aufgezeichnet wird und eine Schülerin oder ein Schüler sich auf einen Knoten setzt und nun aus dieser Froschperspektive heraus bestimmte Eigenschaften des Graphen erkunden soll oder z. B. eine Eulertour durch einen eulerschen Graphen konstruieren soll. Es sind aus der Froschperspektive heraus nicht alle Arbeiten auf Graphen ohne weiteres möglich. Für das Springen zum nächsten Knoten mit kürzester Distanzmarke beim Algorithmus von Dijkstra muss die ausführende Person sich einen Plan des bereits explorierten Teils des Graphen machen, denn ohne „Vogelperspektive“ ist der zu besuchende Knoten sonst nicht zu finden. Für die Tiefensuche oder die Konstruktion von Eulertouren kann die Froschperspektive ohne komplizierte Hilfskonstruktionen direkt zum Einsatz kommen.

Im Klassenzimmer kann die Froschperspektive durch eine **Lochblende** aus Papier oder farbiger Folie leicht visualisiert werden. Die selbst hergestellt Lochblende steht bei Bedarf schnell zur Verfügung und hilft immer wieder, sich in die Froschperspektive zu versetzen.

Die Froschperspektive hilft insbesondere von der Geometrie des gezeichneten Graphen zu abstrahieren und wirklich nur noch die (Relations-)Struktur wahrzunehmen. Gerade auch für Argumentationen zum Beweis von kleinen Graphensätzen ist dies immer wieder hilfreich.

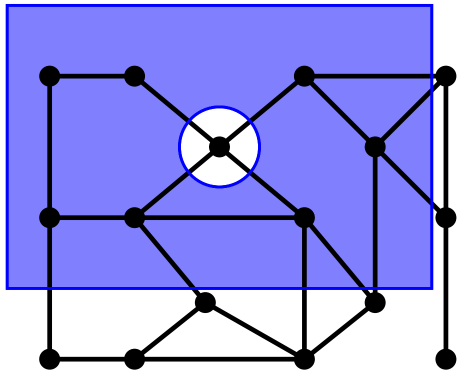


Abbildung 16: Die Froschperspektive im Klassenzimmer: Arbeiten mit der Lochblende.

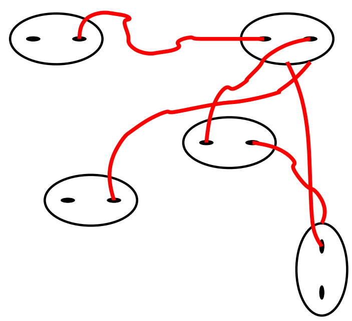


Abbildung 17: Veranschaulichung der fehlenden Geometrie von Graphen mit dem Knopfgraph.

6.1.3 Graphendarstellungen: Knopfgraph, dynamische Software

Ein weiteres Hilfsmittel, um von einer geometrisch festgelegten Vorstellung von Graphen wegzukommen ist der **Knopfgraph**.

Mit seiner Hilfe kann das Phänomen der Isomorphie veranschaulicht werden und das von Green geschilderte Problem ausgeräumt werden ([26], S. 61): „Dabei finden Jugendliche es oft schwierig zu verstehen, dass verschieden aussehende Graphen [...] strukturell identisch sind, d. h. dass ein Isomorphismus zwischen den beiden Graphen existiert.“ Werden Graphen (von jüngeren Schülerinnen und Schülern) nachgebastelt, so lassen sich mit ihnen verschiedene geometrische Positionen ausprobieren, um beispielsweise planare Darstellungen zu suchen. Mit dem Knopfgraphenmodell können dabei auch Einbettungen in den dreidimensionalen Raum ausprobiert werden.

Für das Kürzeste-Wege-Problem kann mit Hilfe eines maßstabsgetreuen Fadenmodells eine Lösung gefunden werden: Festhalten von Start- und Zielknoten und Straffziehen zeigt den kürzesten Weg an.

Mit der **Software „Visage“** [47] können die zweidimensionalen Graphenzeichnungen per Zugmodus verändert werden. Anders als beim Knopfgraphen kann hier schneller experimentiert werden und es gibt die Möglichkeit, auf den Graphen Algo-

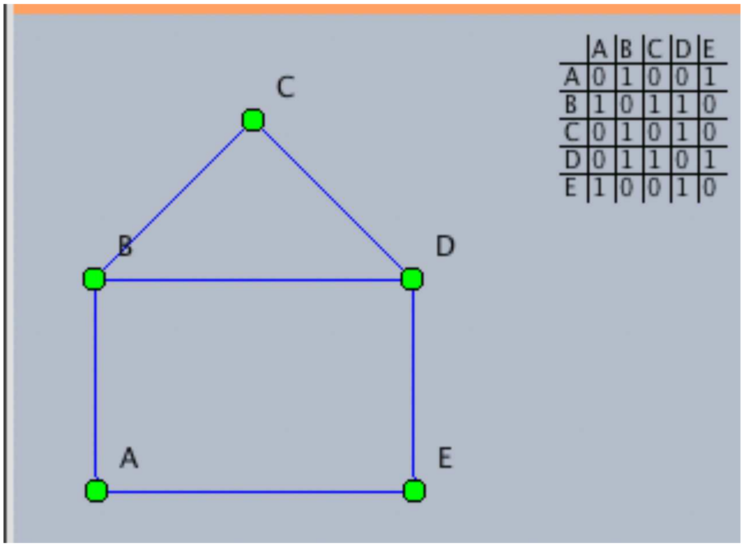


Abbildung 18: Gleichzeitige dynamische Darstellung von Graph und Adjazenzmatrix mit „Visage“

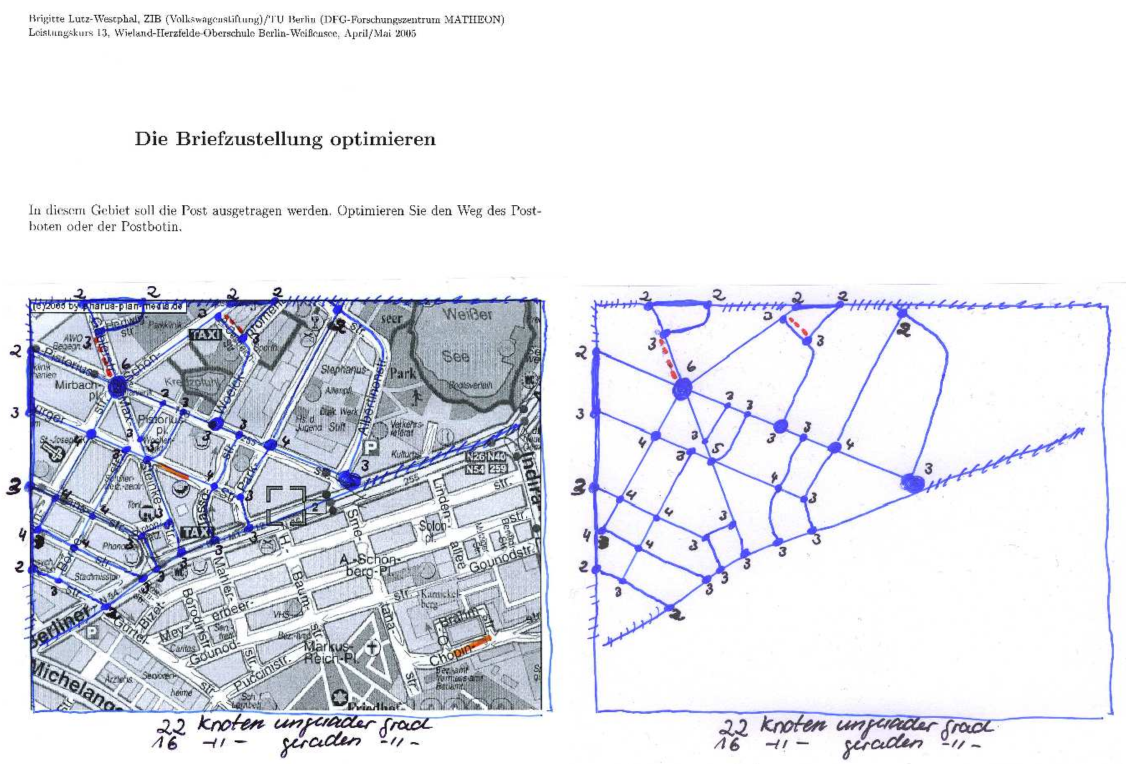
rithmen ablaufen zu lassen, andererseits bleibt das sinnliche Erlebnis aus und kann die dritte Dimension nicht berücksichtigt werden. So muss je nach Erfordernissen des Unterrichts das geeignete Medium gewählt werden.

Was „Visage“ noch zusätzlich liefert, ist eine gleichzeitige Darstellung des gezeichneten Graphen und seiner Adjazenzmatrix (siehe Abb. 18). Der Graph kann wahlweise durch Hinzufügen von Knoten und Kanten verändert werden oder es können durch Klicken auf die Einträge der Matrix Kanten hinzugefügt oder gelöscht werden. Dadurch wird das Zusammenspiel zwischen Zeichnung des Graphen und seiner Matrixdarstellung dem Experiment direkt zugänglich. Verändern der Zeichnung des Graphen durch den Zugmodus verändert die Matrix nicht, was noch einmal bekräftigt, dass verschieden aussehende Graphen strukturell identisch sein können.

6.1.4 Den Übergang vom Realmodell zum mathematischen Modell greifbar machen: der Foliengraph

Für die gewählten Problemstellungen kann meist von einer bereits idealisierten Darstellung der Realität ausgegangen werden, beispielsweise von Stadtplänen, Liniennetzplänen, etc. Solche Darstellungen, die zwar bereits Modellcharakter haben, aber keine mathematischen Modelle sind, können als *Realmodelle* bezeichnet werden.

Wie bereits in Kapitel 5 (Abschnitt 5.7) beschrieben, können der Modellierungsprozess und der sogenannte Modellierungskreislauf unterstützt werden, indem mit Folien gearbeitet wird, die auf das Realmodell gelegt werden. Dies ermöglicht einerseits ein mutigeres Ausprobieren, da der Stadtplan, bzw. das entsprechende Material, geschont wird, und so mehrere Versuche an dem gleichen Beispiel möglich sind. Fehlversuche können einfach verworfen werden oder es können alternative Modellie-


Brigitte Lutz-Westphal, ZIB (Volkswagenstiftung)/TU Berlin (DFG-Forschungszentrum MATHEON)
Leistungskurs 13, Wieland-Herzfelde-Oberschule Berlin-Weißensee, April/Mai 2005

Die Briefzustellung optimieren

In diesem Gebiet soll die Post ausgetragen werden. Optimieren Sie den Weg des Postboten oder der Postbotin.

Abbildung 19: Modellieren auf Folie hilft beim Übergang vom Realmodell zum mathematischen Modell (LK 13).

rungen entwickelt werden, an denen erprobt werden kann, wie sich welche Modellierungsannahme auf die Lösung auswirkt.

Ist das Modell fertig, kann die Folie vom Plan heruntergenommen und somit können Realmodell und Modell in einem Handgriff voneinander getrennt werden (siehe Abb. 19). Ebenso einfach kann eine Überprüfung anhand der realen Situation erfolgen, indem der Plan wieder unter die Folie gelegt wird. Dies ist hilfreich im Problemlöseprozess, aber noch mehr als das: der Übergang vom Realmodell zum mathematischen Modell wird durch diese Handlung sichtbar und dadurch ins Bewusstsein gerückt.

6.2 Das Rollenspiel und andere Methoden zur Veranschaulichung von Algorithmen

Algorithmen als Schritt-für-Schritt-Anweisungen fehlerfrei niederzuschreiben bedeutet eine hohe Anforderung an das analytische Denken.[18] Es fällt Schülerinnen und Schülern der Mittelstufe, aber auch der Oberstufe schwer, die einzelnen Handlungsschritte präzise voneinander zu trennen. Dadurch entstehen oft fehlerhafte Anweisungen. Für die Verfasser dieser Anweisungen ist es fast unmöglich, diese Fehler selbst zu entdecken. Ursache sind sehr häufig zwar gedachte und beim Experimentieren selbstverständlich mit ausgeführte, aber nicht explizit als Anweisung niedergeschriebene Handlungen. Eine andere Fehlerquelle ist, nicht alle möglichen Fälle mit einbezogen zu haben.

Ideal wäre es, mit Hilfe einer Unterrichtssoftware die selbst ausgedachten Algorithmen ausprobieren, und somit eine objektive Überprüfung durchführen zu können. Dies ist, ohne bestimmte Programmiersprachen zu beherrschen, nicht möglich. Sobald die Umgangssprache in irgendeiner Weise normiert wird, um vom Computer verstanden werden zu können, handelt es sich in gewissem Sinne bereits um eine Programmiersprache, die von den Schülerinnen und Schülern erst erlernt oder festgelegt werden müsste.

Die folgenden Methoden zur Veranschaulichung von algorithmischen Vorgängen wurden speziell für den gewählten Themenkanon und den Einsatz in den Sekundarstufen entwickelt.[19] Sie berücksichtigen,

- dass Algorithmen im Alltag von Schülerinnen und Schülern präsent sind,
- dass man den Ablauf durch eine Folge von Einzelbildern darstellen kann,
- dass Algorithmen durch das Zusammenspiel von Anweisung und Ausführung gekennzeichnet sind und nachgespielt werden können,
- dass Algorithmen dargestellt werden können als eine Kette von Aktionen, die auf verschiedenen Datenstrukturen, Variablenlisten und anderen Strukturen ausgeführt werden,
- und dass Datenstrukturen nichts Abstraktes sein müssen, sondern „handgreiflich" dargestellt werden können

6.2.1 Alltagstätigkeiten algorithmisch beschreiben

Algorithmen sind im Alltag ständig präsent, nur ist das vielen nicht bewusst. Ein Kochrezept ist ein Algorithmus, ebenso die Anleitung, einen IKEA-Schrank zusammenzubauen oder die Anleitung zum Wiederaufladen des Handy-Guthabens. An

[18] vgl. Schusters didaktische Thesen [74], S. 245–246

[19] Für den Elementar- und Primarbereich gibt es bereits einige Ideen, z. B. die „Offline activities" von Bell/Witten/Fellows [7].

diese Vorkenntnisse kann im Unterricht angeknüpft werden. Die Analyse von solchen Anleitungen kann ein Einstieg in die Arbeit mit Algorithmen sein. Es stellt sich z. B. die Frage, ob es wirklich notwendig ist, dass in der Anleitung zum Zubereiten einer Tiefkühlpizza dabei steht, dass vor dem Aufbacken die Folie entfernt werden muss. Fragen ganz ähnlicher Art tauchen beim Entwickeln von Graphenalgorithmen wieder auf. Etwa: Reicht es zu schreiben „Wähle eine noch unbesuchte Kante“ oder muss diese Anweisung detaillierter gefasst werden?

Als Vorübung zum eigenen Verfassen von Graphenalgorithmen können **Schritt-für-Schritt-Anweisungen für Alltagstätigkeiten** geschrieben werden. Der Weg vom Klassenzimmer bis zum Brötchenverkaufsstand in der Pausenhalle könnte als Beispiel dienen. Oder das morgendliche Aufstehen, Anziehen, Zähneputzen etc. Auch hier muss wieder hinterfragt werden, wie viel Wissen bei den Ausführenden vorausgesetzt werden kann. Reicht die Anweisung „Nimm Zahnpaste!“ aus, oder muss es heißen „Nimm die Zahpastatube in die eine Hand, schraube mit der anderen den Deckel ab. Lege den Deckel irgendwo ab. Nimm dann die Zahnbürste in die freie Hand, drücke etwa 2 cm Zahnpaste auf die Borsten der Zahnbürste“ etc.

Anhand der alltäglichen Beispiele wird sehr vieles deutlich, was auch bei der Arbeit mit Graphenalgorithmen eine Rolle spielt. Es gibt gelegentlich freie Entscheidungen zu treffen, etwa wohin der Deckel der Zahnpastatube gelegt werde soll. Es ist zu entscheiden, wie viel Vorwissen man voraussetzt (das ist bei den Graphenalgorithmen deshalb im Unterricht möglich, weil wir sie nicht konkret implementieren). Es zeigt sich, dass viele Handlungen unbewusst ausgeführt werden. Diese müssen erkannt und aufgeschrieben werden.

Solche Vorübungen, die im Übrigen auch äußerst motivierend sind und viel Spaß machen können, geben die Möglichkeit, sich mit der Problematik des Aufschreibens von Schritt-für-Schritt-Anweisungen anhand von Alltagshandlungen zu befassen und in diesem vertrauten Kontext bereits einige der zu überwindenden Schwierigkeiten kennenzulernen.

6.2.2 Das Daumenkino

Das **Daumenkino** ist eine Möglichkeit zur Visualisierung des Ablaufes von Algorithmen, die vor allem für die unteren Klassen der Mittelstufe geeignet ist, da es gleichzeitig eine Bastel-Aktivität ist. Um ein Algorithmen-Daumenkino zu erstellen, muss der Ablauf eines Algorithmus in seine Einzelschritte zerlegt werden. Pro Seite des Daumenkinos wird beispielsweise für die Tiefensuche eine neue Kante markiert oder Backtracking auf einer Kante gemacht. Für die kritischen Stellen bei der Tiefensuche: das Löschen von Kanten, die einen Kreis schließen oder das Rückwärtsgehen aus „Sackgassen“ wieder hinaus, bietet das Daumenkino Klärung.

Aktionen, die vorher unreflektiert und vielleicht sogar unbemerkt durchgeführt wurden (wie das Verlassen von „Sackgassen“), müssen bei der Herstellung des Daumenkinos in Einzelaktionen aufgespalten werden und werden so ins Bewusstsein geholt.

Für die Niederschrift der Handlungsanweisung können dann die einzelnen Blätter der Daumenkinos wiederum helfen, keine Zwischenschritte auszulassen.

Verwenden die Schülerinnen und Schüler für ihre Daumenkinos alle den gleichen Graphen, so können sie neben der Aufteilung des Algorithmus in Einzelschritte noch eine weitere Beobachtung machen. Die Lösungen, die dabei herauskommen, sind nicht alle gleich (das hängt natürlich vom konkreten Graphen und vom Algorithmus ab). Bei der Tiefensuche, um beim obigen Beispiel zu bleiben, können unterschiedliche aufspannende Bäume entstehen. Ausgehend von dieser Beobachtung ergeben sich neue Forschungsfragen für den Unterricht: Wie viele unterschiedliche Lösungen kann es geben? Wie muss ich den Graphen bauen, um mit dem gegebenen Algorithmus eine eindeutige Lösung zu erhalten (eine Aufgabe für das Graphenlabor)? Wie muss ich den Algorithmus formulieren, um eine eindeutige Lösung zu erhalten (beispielsweise durch eine Festlegung bei der Wahl von nächsten Knoten oder Kanten)? Sind denn überhaupt alle von den Algorithmen gefundenen Lösungen richtig?

6.2.3 Blättertausch und „Schiffe versenken“

Zur Überprüfung der Verständlichkeit und Funktionstüchtigkeit von selbst formulierten Schritt-für-Schritt-Anweisungen wurden zwei Methoden entwickelt. Die erste, der **Blättertausch**, ist sehr naheliegend und in der Unterrichtspraxis nicht neu (vgl. z. B. die Aufgabenstellung in Hart [33], S. 258). Die selbst verfassten Algorithmen werden von den Schülerinnen und Schülern auf jeweils ein Blatt Papier geschrieben. Diese mit Namen versehenen Blätter werden gemischt und neu in der Klasse verteilt, so dass keiner sein eigenes Blatt erhält. Nun produziert sich jeder mehrere Beispielgraphen und probiert daran die Anweisungen auf dem Blatt aus. Korrekturen und/oder Fragen werden auf dem Blatt notiert und dies an den Verfasser zur Überarbeitung zurückgegeben. Dieser Korrekturprozess kann mehrmals hintereinander ausgeführt werden, um Qualitätsunterschiede der Korrekturen auszugleichen und um zu möglichst fehlerfreien Ergebnissen zu kommen.

Mit dem Blättertausch wird jeder einzelne Schüler verantwortungsvoll mit in die Arbeit einbezogen. Auch schwächere Schüler können dabei ohne Probleme mitwirken, da die Ausführung der Anweisungen stets möglich sein sollte. In der Phase der Korrektur bilden sich verschiedene Zweiergrüppchen, um Rückfragen zu den Anmerkungen zu diskutieren.

Eine Variante, die spielerischer ist, aber die Niveauunterschiede innerhalb der Klasse nicht so gut ausgleichen kann wie der Blättertausch, ist **„Schiffe versenken“**. Die Schüler tun sich in Zweiergruppen zusammen. Sie bauen zwischen sich einen Sichtschutz (Schulranzen o. ä.) auf. Einer von beiden hat seinen selbst formulierten Algorithmus vor sich liegen. Der andere zeichnet sich einen Beispielgraphen. Nun bekommt er von der anderen Person die Anweisungen gesagt und führt sie durch. Die Person, die die Anweisungen gibt, kann weder den Graphen noch die darauf ausgeführten Aktionen sehen.

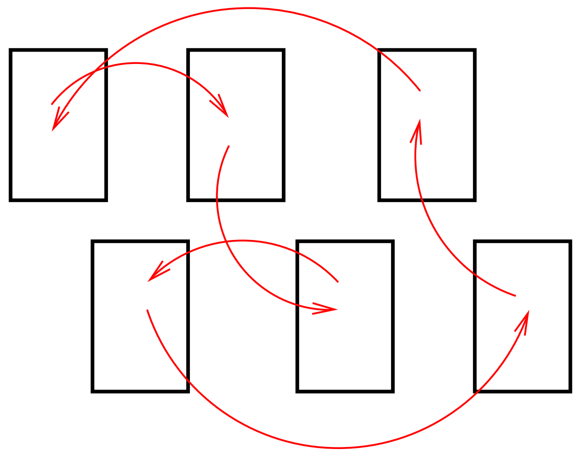


Abbildung 20: Überprüfung von selbst erdachten Algorithmen: der Blättertausch.

Wenn die Person, die auf dem Graphen arbeitet, fertig ist bzw. nicht mehr weiterkommt, dann wird der Ablauf und das Ergebnis diskutiert. Verständnisschwierigkeiten bei den Formulierungen können so erkannt und behoben werden und es kann geprüft werden, ob der erdachte Algorithmus auch in von anderen erzeugten Beispielen funktioniert oder ob dort Sonderfälle auftreten, auf die man selbst noch nicht gestoßen war.

6.2.4 Der „dumme Computer“

Eine ähnliche inhaltliche Wirkung wie der Blättertausch und „Schiffe versenken“ zeigt die Methode **dummer Computer**. Sie arbeitet aber mit einer anderen Sozialform. Der etwas salopp gewählte Name soll verdeutlichen, dass Computer nicht selbst denken können, also auch nicht mitdenken können, wenn sie Anweisungen ausführen sollen.

Das Spiel wird mit der ganzen Klasse durchgeführt. Ein Schüler oder eine Schülerin geht an die Tafel und spielt den Computer. Entweder ist an der Tafel für alle sichtbar ein Graph oder eine Adjazenzmatrix angezeichnet oder – das ist die spannendere und schwierigere Version – der Graph ist auf der Tafelrückseite, so dass nur der „Computer“ ihn sehen kann. Der „Computer“ bekommt nun aus der Klasse Anweisungen, was er tun soll. Die schwierigere Rolle hat die Person an der Tafel. Sie muss nun tatsächlich versuchen, genau das zu tun, was angewiesen wurde. Dabei darf sie nichts hineininterpretieren oder selbständig mitdenken, daher der Name für diese Methode.

Weil es tatsächlich sehr schwierig ist, die Rolle des Computers korrekt auszuführen, können zusätzlich ein oder zwei „Kontrolleure“ an die Tafel geholt werden, die darauf achten, dass der „Computer“ nicht mitdenkt. Als Lehrer oder Lehrerin kann man auch mit vorne an der Tafel stehen und den „Computer“ unterstützen, aber ihn auch gelegentlich animieren, besonders kritische Fälle anzusteuern, um darüber mit der

Abbildung 21: Das Rollenspiel.

Klasse diskutieren zu können.

Solch ein Eingreifen kann beispielsweise hilfreich sein, wenn der Zwiebelschalen-Algorithmus für Eulertouren erarbeitet wird. Die Person an der Tafel neigt meist dazu, die Eulertour gleich beim ersten Versuch komplett zu konstruieren. Für das Verständnis des Algorithmus ist es allerdings notwendig, zunächst mehrere kleinere Kreise zu erzeugen, um diese dann geeignet hintereinander zu hängen.

Die Methode „dummer Computer“ bietet die Möglichkeit, mit der ganzen Klasse über algorithmische Abläufe und über die gewählten Einzelschritte und deren Formulierungen zu diskutieren. Dass es immer reichlich viele Interessenten für die Rolle des „dummen Computers“ gibt, und solche Stunden häufig sehr fröhlich und engagiert ablaufen, sind erfreuliche weitere Effekte dieser Methode.

6.2.5 Das Rollenspiel

Die schönste und wahrscheinlich eindrucksvollste Methode zum Erstellen und Überprüfen von Schritt-für-Schritt-Anweisungen ist das **Rollenspiel**. Die Grundidee ist dabei, die Mechanik eines Algorithmus sichtbar und „greifbar“ zu machen. Zunächst müssen die notwendigen Objekte ausfindig gemacht werden: Ein Graph (gezeichnet oder als Matrix), Listen von bereits besuchten Knoten, Vorgängerlisten, Variablenlisten für Weglängen etc. Das hängt von dem zu spielenden Algorithmus ab. Dann bekommt jedes dieser Objekte einen Platz an der Tafel (der Graph oder seine Matrix werden angeschrieben, für Speicherplätze, Variablenlisten o. ä. werden Flächen abgeteilt. Eine Tafelseite oder ein OH-Projektor werden für die Niederschrift des Algorithmus reserviert. Nun werden den einzelnen Objekten Personen zugeordnet und ein/e Protokollant/in bestimmt. Sie stellen sich zu den von ihnen zu verwaltenden Objekten. Die restliche Klasse hat die Rolle, den Akteuren Anweisungen zu geben und den Ablauf zu überwachen.

Der Algorithmus startet, die Anweisung dazu kommt aus der Klasse, beispielsweise „Wähle einen Startknoten und markiere ihn!“. Der Graphenverwalter liest aus der Matrix einen Knoten aus und sagt den Knotennamen und markiert ihn mit bunter Kreide. Der Protokollant schreibt diese Aktion auf. Nächste Anweisung: „Der Startknoten bekommt die Distanz 0 zugeordnet." Die Verwalterin der Variablenliste „Abstand" notiert sich dies. In dieser Art läuft der Algorithmus Schritt für Schritt ab. Ungenaue Anweisungen oder fehlende Handlungsschritte werden von den Akteuren an der Tafel bemerkt und moniert. Die Zuschauer diskutieren, ob die Anweisungen korrekt durchgeführt und protokolliert werden, Gelegentlich kommunizieren auch die Personen an der Tafel direkt untereinander, wenn es notwendig ist.

Dieses ganze Geschehen kann sehr lebhaft werden und zu heftigen Diskussionen an der Tafel und im Klassenraum führen. Durch die Visualisierung wird deutlich, wer wann welche Informationen benötigt und wie die einzelnen Tätigkeiten aufeinander folgen müssen, damit der Ablauf reibungslos klappt. So können Denk- und Formulierungsfehler von Schülerlösungen ausgemacht und geklärt werden.

Die Protokollantenrolle ist insbesondere dann wichtig, wenn es Probleme mit dem Aufschreiben einer anschaulich gewonnenen Algorithmusidee gibt. Unklarheiten werden von der Protokollantin oder dem Protokollanten sofort moniert. Schleifen erkennt diese Person auch leicht, denn sie wird auf sich aufmerksam machen, wenn sie zum wiederholten Mal dieselben Tätigkeiten beschreibt. Anhand des Protokolls kann dann herausgefunden werden, an welcher Stelle eine Schleife beginnt und wie aus der Schleife wieder herausgeführt werden kann.

Nicht selten fällt es während eines solchen Rollenspiels auf, dass noch mehr Objekte benötigt werden als vorher gedacht wurde. Es gibt auch einige Entscheidungen zu treffen, die sich schon vorher bei den ersten Versuchen, die Handlungsanweisung zu verschriftlichen, als Fragen gestellt haben. Wie werden beispielsweise besuchte Knoten markiert? Nehmen wir dazu einfach einen Farbstift bzw. farbige Kreide oder bekommt die entsprechende Zeile in der Adjazenzmatrix eine Markierung? Oder eröffnen wir eine Liste, in die die besuchten Knoten eingetragen werden? Solche Fragen werden dann anhand des Rollenspiels diskutiert und es besteht auch die Möglichkeit, Alternativen auszuprobieren und zu beobachten, in welchem Fall die Handlungsanweisungen am besten formuliert werden können. Durch die Diskussion im Rahmen des Rollenspiels kann die Klasse sich gemeinsam auf bestimmte Standards in Formulierung und Detaillierungsgrad festlegen (vgl. z. B. Abb. 22.

Besonders reizvoll wird das Rollenspiel, wenn es nicht an einem gezeichneten Graphen durchgeführt wird, sondern nur anhand einer selbst erstellten Matrix ohne Zeichnung des Graphen. Natürlich muss darauf geachtet werden, dass die Matrix die für den Algorithmus geforderten Voraussetzungen erfüllt. Das ist gleichzeitig eine Aufgabe zur Erkundung von Graphenmatrizen. Es stellen sich Fragen wie: Welche Bedingungen muss eine Matrix erfüllen, um einen Eulergraphen darzustellen? Kann der Algorithmus von Dijkstra auch mit negativen Kantengewichten umgehen?

Der Algorithmus läuft dann völlig ohne visuelle Darstellung des Geschehens ab und die Spannung ist groß, ob er tatsächlich auch das Richtige tut. Dadurch geschieht noch stärker als bei der Arbeit mit der Lochblende eine Ablösung von der konkreten Graphendarstellung und der Tätigkeit des Anmalens von Kanten. Es entstehen nochmals neue Fragen, z. B. nach dem Abspeichern von bereits gegangenen Wegen,

Kürzeste Wege mit der U-Bahn

Eigenschaften an den Stationen:

0 := freie Station
a := Anwesenheit an der Station
b := geplante Anfahrt
c := schon besuchte Stationen

Algorithmus:

1. Anfangs hat A (Anfangsstation) die Eigenschaft a und alle anderen Stationen die Eigenschaft 0.
2. Zuerst alle, zu auf a geschalteten, benachbarten Stationen mit der Eigenschaft 0 auf b schalten und die Verbindungen speichern.
3. Dann alle Stationen mit der Eigenschaft a auf c schalten.
4. Danach alle Stationen mit der Eigenschaft b auf a schalten.
5. Falls B (Endstation) die Eigenschaft a hat ist dieser Weg der kürzeste, wenn das nicht der Fall ist Schritte 2.-5. wiederholen.

Abbildung 22: Breitensuche, aufgeschrieben nach Durchführung des Rollenspiels (Klasse 11).

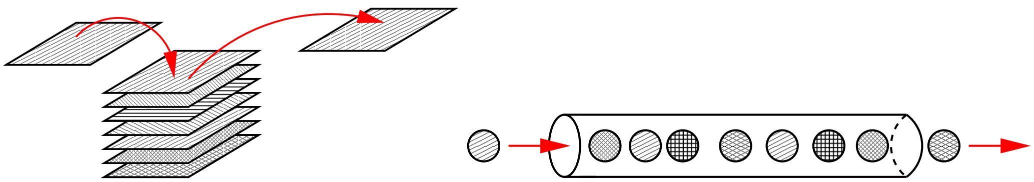


Abbildung 23: Stack und Queue zum Anfassen: als Papierstapel und als Tennisbälle in einer Röhre.

die vorher einfach anhand der Zeichnung nachvollzogen werden konnten. Nach dem Ablauf des Algorithmus wird dann der Graph gezeichnet und das vom Algorithmus berechnete Resultat eingetragen und auf Korrektheit überprüft.

Das Fehlerbewusstsein für selbst erdachte Algorithmen ist laut Schuster [74] in der Mittelstufe noch sehr wenig ausgeprägt. Durch die Arbeit mit der Methode des Rollenspiels kann es verbessert werden und Fehler oder Ungenauigkeiten gleichzeitig entdeckt und ausgeräumt werden. Ein weiterer Aspekt ist, dass mit dem Rollenspiel eine neue Sozialform im Klassenzimmer entsteht, in der alle mitarbeiten können.

Die Erfahrungen mit dem Rollenspiel zeigen, dass solche Unterrichtsstunden immer von hohem Schülerengagement und einer sehr effektiven, zielorientierten Arbeitsweise geprägt sind. Nicht zuletzt macht diese Methode Spaß, weil sie Denkvorgänge in Bewegung umsetzt und visualisiert und weil die ganze Klasse dabei aktiv beteiligt ist.

6.2.6 Datenstrukturen zum Anfassen: Stack und Queue

Im Rahmen der Entwicklung von Graphenalgorithmen kann es vorkommen, dass elementare Datenstrukturen benötigt werden. Soll die Breitensuche so organisiert werden, dass die Wahl des jeweils nächsten aktiven Knotens durch die Reihenfolge der vorherigen Exploration festgelegt wird, so kann dies mittels einer Queue geschehen. Die Tiefensuche kann mit einem Stack handlich und unmissverständlich realisiert werden.

Stack und Queue können einfach und einprägsam veranschaulicht werden: als Papierstapel oder Karteikartenstapel und als Röhre, durch die Tennisbälle geschoben werden (siehe Abb. 23). Diese Datenstrukturen „zum Anfassen“ können dann in das Rollenspiel mit einbezogen werden. Für die Breitensuche werden die bereits explorierten Knoten durch beschriftete Tennisbälle dargestellt und in der Reihenfolge ihres Auffindens im Graphen in die Röhre (die natürlich lang genug sein muss) gesteckt. Der nächste zu bearbeitende Knoten wird dann am anderen Ende aus der Röhre wieder herausgeholt.

Der Stack, der beispielsweise für die Tiefensuche eingesetzt werden kann, besteht aus Zetteln, auf die die Namen der besuchten Knoten geschrieben werden und die aufeinander gestapelt werden. Für das Backtracking werden die Zettel nacheinander wieder vom Stapel heruntergenommen.

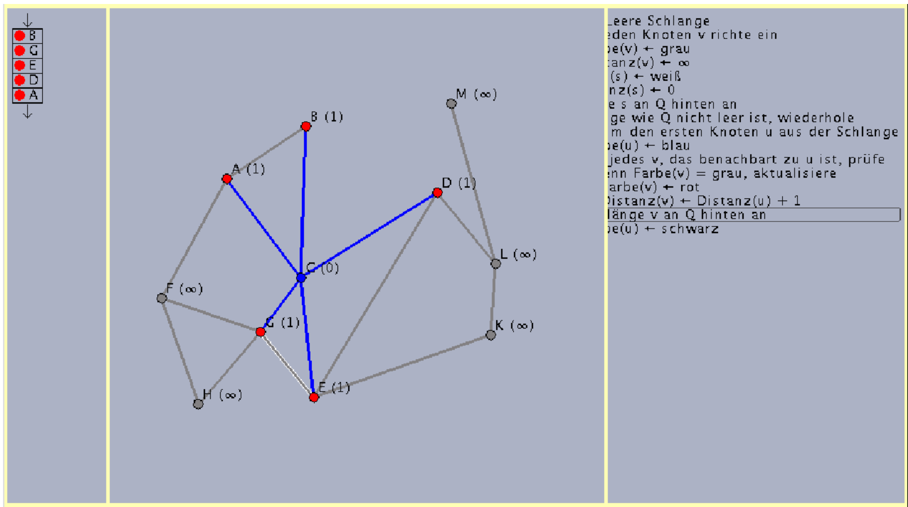


Abbildung 24: Dynamische Darstellung der Queue (links oben) bei der Breitensuche mit „Visage“.

Besonders reizvoll ist der Einsatz von Stack und Queue in dieser Darstellung, wenn es gelungen ist, für die Breitensuche und die Tiefensuche eine gemeinsame Formulierung zu finden, die sich nur durch den Einsatz der jeweiligen Datenstruktur unterscheidet. Dann kann das Rollenspiel einmal mit der Queue und einmal mit dem Stack ablaufen, möglichst nur unter Zuhilfenahme der Matrix und ohne Zeichnung des Graphen. Die graphische Darstellung der Ergebnisse zeigt dann erst die erheblichen Unterschiede, die durch die unterschiedlichen Datenstrukturen verursacht werden. Dieses Erlebnis zeigt sehr anschaulich, wie wichtig das Nachdenken über die passenden Datenstrukturen sein kann.

Die Software „Visage“ [47] zeigt beim Ablauf von Algorithmen nicht nur die Graphenzeichnung, den Ablauf des Algorithmus und den Algorithmus in Pseudocode, sondern auch im gleichen Fenster die verwendete Datenstruktur dynamisch an (siehe Abb. 24). Damit wird deutlich, das auch „richtige“ Algorithmen mit diesen einfachen im Unterricht verwendeten Datenstrukturen arbeiten.

6.3 Zusammenfassung

Für den Unterricht über kombinatorische Optimierung wurden folgende Unterrichtsmethoden und -medien entwickelt:

- das Graphenlabor,
- die Froschperspektive, visualisiert durch die Lochblende,
- Graphendarstellungen: der Knopfgraph und dynamische Software[20],
- der Foliengraph,
- Alltagstätigkeiten algorithmisch beschreiben,
- das Daumenkino,
- der Blättertausch,
- „Schiffe versenken“,
- der „dumme Computer“,
- das Rollenspiel,
- Stack und Queue zum Anfassen.

Die Methoden unterscheiden sich in ihren Aktions- und Sozialformen, die Medien sind in unterschiedlichen Kontexten einsetzbar, so dass sich hier eine große Variationsbreite ergibt, und flexibel auf die Bedürfnisse der Klasse und die Erfordernisse der jeweiligen Situation eingegangen werden kann.

[20] „Visage“ wird im Rahmen des MATHEON-Projektes G6 (U. Kortenkamp, A. Geschke, B. Lutz-Westphal, D. Materlik) entwickelt.

7 Unterricht

„Wie macht man aus dem Fachgebiet der kombinatorischen Optimierung Unterricht?“ Diese Frage war die Leitfrage für die Entstehung der vorliegenden Arbeit. In den vorangehenden Kapiteln wurde eine Unterrichtstheorie entwickelt, danach wurde nach den historischen Wurzeln der unterrichtlichen Umsetzung gesucht. Der Stoff wurde bezüglich seiner charakteristischen Methoden analysiert, nach geeigneten Themen durchforstet und auf sein didaktisches Potenzial hin untersucht. Auf die Beschreibung einer ganzen Palette von Unterrichtsmethoden folgt nun die Dokumentation von Unterricht.

Im Rahmen des Projektes „Diskrete Mathematik für die Schule“ fanden Unterrichtsversuche in Berlin und Tübingen statt:

- **Klasse 8**, Wildermuth-Gymnasium Tübingen,
  Minimale aufspannende Bäume, 10 Stunden,
  November 2002,
- **Klasse 9**, Geschwister-Scholl-Schule Tübingen,
  Das chinesische Postbotenproblem, 11 Stunden,
  November/Dezember 2002,
- **Klasse 11**, profilierter Profilkurs, Herder-Oberschule Berlin-Charlottenburg,
  Kürzeste Wege und das Travelling-Salesman-Problem, 11 Stunden,
  Februar–April 2003,
- **Klasse 11** Profilkurs, Romain-Rolland-Gymnasium Berlin-Reinickendorf,
  Das Travelling-Salesman-Problem, 11 Stunden,
  Mai/Juni 2003,
- **Klasse 11**, profilierter Profilkurs, Herder-Oberschule Berlin-Charlottenburg,
  Kürzeste Wege, 8 Stunden,
  April–Juni 2004,
- **Klassenstufen 11–13**, Sommerschule Blossin,
  Das Travelling-Salesman-Problem, 15 Stunden,
  Juni 2004,
- **Leistungskurs 13**, Wieland-Herzfelde-Oberschule Berlin-Weißensee,
  Das chinesische Postbotenproblem, 12 Stunden,
  April/Mai 2005.

Die Inhalte und Abläufe der Unterrichtseinheiten werden in diesem Kapitel nur kurz skizziert. Eine detaillierte Beschreibung der Unterrichtseinheiten zu kürzesten Wegen, minimalen aufspannenden Bäumen und zum chinesischen Postbotenproblem findet sich in den drei Buchkapiteln, die in Kapitel 8 abgedruckt sind.

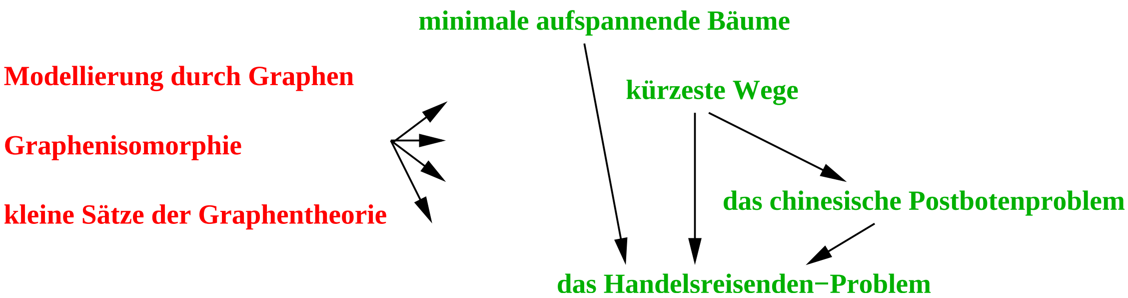


Abbildung 25: Schematische Darstellung der Vernetzung der Inhalte.

Den Kurzbeschreibungen der Unterrichtseinheiten folgt eine Auswahl von im Unterricht verwendeten Arbeitsblättern. Die Abbildung 25 zeigt, inwiefern die einzelnen Inhalte miteinander verknüpft sind. Dies hat Auswirkungen auf die Unterrichtsmaterialien. Durch die Überschneidungen und Verknüpfungen sind einige Materialien wie z. B. über Graphenisomorphie in allen Klassenstufen und Themenbereichen einsetzbar. Darum werden die Arbeitsblätter nicht jeweils im Anschluss an die Beschreibung einer Unterrichtseinheit gezeigt, sondern gebündelt in einem extra Unterkapitel.

In einem dritten Teil dieses Kapitels werden einige Schülerprodukte und -äußerungen dokumentiert, um zu zeigen, dass sich darin Bestätigungen für die Thesen dieser Arbeit finden, aber nicht zuletzt auch, um etwas von der (fast ausnahmslosen) Begeisterung der Schülerinnen und Schüler für diesen Unterricht über kombinatorische Optimierung weiterzugeben!

7.1 Die Unterrichtseinheiten in Kürze

Die folgenden Beschreibungen der Unterrichtseinheiten sind bewusst knapp gehalten. Sie sollen nur als Anhaltspunkte für einen Unterricht dienen, der stets auf die besonderen Gegebenheiten und Bedürfnisse jeder Klasse reagiert. Die Abfolge des Unterrichts ergibt sich aus den Fragen und Ergebnissen, die in den Phasen selbständiger Arbeit der Schülerinnen und Schüler entstehen. Darum werden hier keine Stoffverteilungspläne abgedruckt, da sie zu starre Vorgaben machen. Ein Zeitrahmen von mindestens 8, besser jedoch 12 Schulstunden für jede der Unterrichtseinheiten hat sich als sinnvoll erwiesen. Je nach Grad der Vertiefung in den einzelnen Fragestellungen können die Themen auch über längere Zeiträume hinweg bearbeitet werden.

Eine genaue Zuweisung der einzelnen Unterrichtseinheiten zu bestimmten Klassenstufen wurde deshalb nicht vorgenommen, weil jedes Thema in unterschiedlicher Tiefe behandelt werden kann und daher von „leicht“ bis „anspruchsvoll“ variiert werden kann. Insbesondere in der Beschäftigung mit Algorithmen und z. B. Korrektheitsbeweisen, aber auch im Rahmen der Modellierung und Graphentheorie ergeben sich viele Möglichkeiten, das Niveau dem Alter und Leistungsstand der Lerngruppe anzupassen.

7.1.1 Minimale aufspannende Bäume (Kl. 7–9)

Ausgangsmaterial Eine Karte eines Telefonnetzes o. ä.

Problemstellung Eine Telefongesellschaft möchte vorhandene Telefonleitungen mieten, um in dem gegebenen Gebiet Telefondienste anbieten zu können.

Aufgabe Was sind die Anforderungen an das zu mietende Teilnetz?
Wie kann es ermittelt werden?

Modellierung Welche Aspekte spielen eine Rolle für die Lösung des Problems? Welche Daten haben wir vorliegen? Welche können ermittelt werden? Wie kann das Problem auf eine „handliche Größe“ gebracht werden?

Das Handwerkszeug: Graphen Graphen, Kreise, Bäume, aufspannende Bäume, Kantengewichte, minimale aufspannende Bäume, Knotengrade, Datenstrukturen und Graphenisomorphie.

Kleine Graphensätze Verschiedene Sätze über Bäume, Prüfer-Code,
(optional: Handshaking Lemma, Anzahl der Knoten ungeraden Grades).

Algorithmen Wie findet man aufspannende Bäume?
Wie findet man minimale aufspannende Bäume?
Algorithmen zu bereits bekannten Prozeduren
(z. B. Zähne putzen, Termumformung o. ä.).
Datenstrukturen für Graphen: Nachbarschaftslisten, Matrizen.
Tiefensuche, Algorithmen von Prim und Kruskal.

Sortieren (optional) Was tun, wenn die Kantengewichte nicht geordnet sind?
Einfache Sortier-Algorithmen, z. B. Bubble-Sort oder Insertion-Sort.

Ergebnis Graphenmodell, Algorithmus zur Konstruktion minimaler aufspannender Bäume, konkrete Lösung für das Anfangsproblem, evtl. Dokumentation des Lösungsweges als Wandzeitung o. ä.

Weiterführung Die Wartung der Knoten als Travelling-Salesman-Problem: Für die Wartung der großen Netzknoten soll eine kürzeste Rundreise gesucht werden (Travelling-Salesman-Problem). Wie viele verschiedene Rundreisen gibt es? Kombinatorische Explosion.
Entwicklung von Heuristiken wie „Nächster Nachbar“ und „Doppelter Nächster Nachbar“. Erfahrung machen, dass hier die Greedy-Methoden nicht sicher funktionieren.

7.1.2 Das chinesische Postbotenproblem (Kl. 9–13)

Ausgangsmaterial Stadtplanausschnitt, idealerweise rund um die Schule (Originale Begehungspläne bzw. Gebietszuschnitte fallen üblicherweise unter das Betriebsgeheimnis und werden von den entsprechenden Firmen daher nicht zur Verfügung gestellt).

Problemstellung Gesucht wird eine optimale Tour des Müllautos bzw. ein optimaler Weg des Postboten durch das im Stadtplanausschnitt dargestellte Gebiet. (Die Modellierung wird besonders interessant, wenn die Tourenplanung für die Müllabfuhr und für Briefzusteller parallel betrachtet werden. Dabei wird deutlich, dass das Ergebnis der Modellierung sehr unterschiedlich ausfallen kann, dass aber der weitere Lösungsweg identisch ist.)

Aufgabe Welche Anforderungen muss die Tour eines Briefträgers oder eines Müllautos erfüllen? Wie findet man eine optimale Tour?

Modellierung Wie genau soll das Modell werden? Berücksichtigung von Abbiegezeiten, unterschiedlichen Fahrspuren etc.?

Das Handwerkszeug: Graphen Graphen, Knotengrad, Kreise, Eulertouren, Eulergraphen und Semi-Eulergraphen, Kantengewichte, Matchings, Datenstrukturen und Graphenisomorphie.

Graphensätze Handshaking Lemma, Anzahl der Knoten ungeraden Grades, Existenz von Eulertouren auf Eulergraphen.

Algorithmen zum Finden einer Eulertour
Algorithmen zu bereits bekannten Prozeduren (z. B. Zähne putzen, Termumformung o. ä.). Datenstrukturen für Graphen: Nachbarschaftslisten, Matrizen. Algorithmen von Hierholzer („Zwiebelschalen-Algorithmus“) und Fleury.

„Reparieren“ nicht-eulerscher Graphen Perfektes Matching minimalen Gewichts auf den Knoten ungeraden Grades. Dafür werden kürzeste-Wege-Algorithmen benötigt. Matching-Algorithmen werden nicht behandelt (zu schwer).

Der Algorithmus von Dijkstra Kennenlernen und Nachvollziehen des Algorithmus (nicht unbedingt selber entwickeln, da er hier nur als Hilfsmittel gebraucht wird), Durchspielen einiger Beispiele von Hand, Visualisierung.

Sortieren (optional) Einfache Sortier-Algorithmen,
z. B. Bubble-Sort oder Insertion-Sort

Exkurs: „Lästige Nebenbedingungen“ Wie können Nebenbedingungen berücksichtigt werden? Z. B.: Der Briefträger will möglichst etwa auf der Hälfte der Strecke einen Kaffee trinken. Das große Hochhaus sollte zu Beginn der Tour eingeplant werden, damit er diese große Postmenge nicht den ganzen Tag herumschleppen muss.

Ergebnis Graphenmodell, Eulertour-Algorithmen, optimierte Tour des Briefträgers oder des Müllautos, Dokumentation der Erarbeitung.

7.1.3 Das Kürzeste-Wege-Problem (Kl. 10–13)

Ausgangsmaterial U- und S-Bahnplan, Stadtplanausschnitt (z. B. Umgebung der Schule), bzw. Ausschnitt aus einer Straßenkarte.

Problemstellung Gesucht werden kürzeste Wege im U- und S-Bahnnetz bzw. im Straßennetz. Dabei gibt es verschiedene Arten von kürzesten Wegen: möglichst wenige Stationen, möglichst selten umsteigen, möglichst kurze Fahrzeiten oder möglichst kurze Strecken. Jeweils sind unterschiedliche Modellierungen des Problems erforderlich. Zudem werden unterschiedliche Algorithmen benötigt.

Aufgabe Was genau ist ein kürzester bzw. optimaler Weg?
Wie können optimale Wege gefunden werden?

Modellierung Der U- und S-Bahnplan ist an sich schon ein Graph, der geeignet ist, um kürzeste Wege bezüglich der Anzahl der Stationen zu konstruieren. Will man die Anzahl der benutzten Linien minimieren (möglichst wenig umsteigen), so muss man diesen Graphen etwas verändern. Umsteigebahnhöfe müssen so modelliert werden, dass Umsteigen mehr Kanten verbraucht als Nicht-Umsteigen. Für die Suche nach (zeitmäßig) schnellen oder (kilometermäßig) kurzen Wegen braucht man Kantengewichte, die Fahrzeiten bzw. Streckenlängen angeben. Modelle für Straßennetze können unterschiedlich komplex werden.

Das Handwerkszeug: Graphen Graphen, Kreise, Wege, Bäume (als Erzeugnis von Breitensuche und Algorithmus von Dijkstra), Kantengewichte, Knotengrade, Datenstrukturen und Graphenisomorphie.

Graphentheorie Handshaking Lemma, Anzahl der ungeraden Knoten,
Sätze über Bäume, verschiedene Beweistechniken,
Abschätzung der Anzahl aller A-B-Wege, kombinatorische Explosion.

Datenstrukturen Inzidenz- und Adjazenzmatrizen, Nachbarschaftslisten,
Queue und Stack.

Algorithmen Zunächst für ungewichtete Graphen: Breitensuche,
dann für gewichtete Graphen: Algorithmus von Dijkstra,
Vergleich Breitensuche-Tiefensuche,
Korrektheitsbeweise.

Ergebnis Graphenmodell, Algorithmen, die kürzeste Wege konstruieren, konkrete Lösungen für die Anfangsprobleme, Dokumentation der Erarbeitung.

Weiterführung Das Travelling-Salesman-Problem: Was passiert, wenn statt eines kürzesten Weges ein kürzester Rundweg, der durch jeden Knoten genau einmal führt, gesucht wird?

7.1.4 Das Travelling-Salesman-Problem (Kl. 10–13)

Ausgangsmaterial Stadtplanausschnitt (z. B. Einzugsbereich der Schule), Ausschnitt aus einer Straßenkarte, eine Entfernungstabelle oder ein Bohrlochproblem o. ä.

Problemstellung Es wird eine optimale Rundreise gesucht, die jeden Ort (bzw. jedes Bohrloch) genau einmal besucht.

Aufgabe Wie können gute Rundreisen gefunden werden?

Modellierung Was bedeutet „kürzeste Entfernung“? Unterschiedliche Definitionen von Distanzen (z. B. beim Bohrlochproblem). Abstraktionsschritt vom Stadtplan/Landkarte zu einem vollständigen kürzeste-Wege-Graph mit den einzelnen Orten als Knoten.

Graphen Graphen, Kreise, Hamiltonkreise, Hamiltongraphen, Knotengrade, Wege, Bäume, minimale aufspannende Bäume, Matchings, Eulertouren, Eulergraphen.

Graphentheorie Sätze über Knotengrade, Sätze über Bäume, Existenz von Eulertouren auf Eulergraphen, verschiedene Beweise, Anzahl der TSP-Touren, kombinatorische Explosion.

Heuristiken Konstruktionsheuristiken: Nächster Nachbar, Doppelter Nächster Nachbar, Spanning-Tree-Heuristik, Christofides-Heuristik, Billigste Insertion. Verbesserungsheuristiken: einfache Austauschverfahren.

Benötigte Algorithmen Algorithmen von Prim oder Kruskal, Algorithmus von Dijkstra, Algorithmen von Hierholzer oder Fleury.

Abschätzungen Berechnung von unteren Schranken mit 1-Bäumen, Fehlerabschätzung für die Christofides-Heuristik.

Beispiele konstruieren (Kleine) Beispiele konstruieren, die für bestimmte Heuristiken besondere Eigenschaften haben, z. B. so, dass die Nächste-Nachbar-Heuristik die längste Kante verwenden muss, oder dass eine Heuristik bei guter Wahl des Anfangsknotens eine optimale Tour finden kann. Optimallösungen für kleine Beispiele werden per Enumeration ermittelt.

Komplexitätstheorie
Annäherung an die Problematik der NP-schweren Probleme.

7.2 Beispiele für Arbeitsblätter

Auf den folgenden Seiten wird eine Auswahl aus den für den Unterricht entwickelten Arbeitsblättern gezeigt. Solche Arbeitsblätter vermögen nicht den tatsächlich abgelaufenen Unterricht widerzuspiegeln, da es neben der Gestaltung der Arbeitsaufträge auch sehr stark auf die Art des Einsatze im Unterricht ankommt. Arbeitsmaterialien für einen authentischen, genetisch-entdeckenden Unterricht befinden sich stets in einem „Spagat“ zwischen vorgefertigten Fragen und flexibler Einsetzbarkeit.

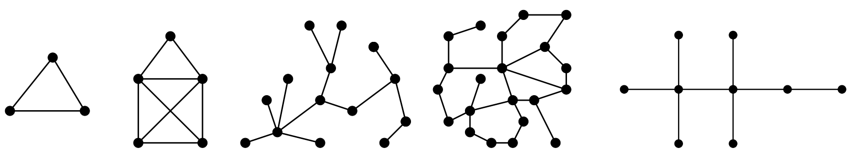
Zu Beginn stehen die Arbeitsblätter, die für alle Unterrichtseinheiten eingesetzt werden können. Es folgt ein Modul über Graphenisomorphie, das als (Einzelstunden-)Baustein fast an jeder Stelle in den Unterricht eingefügt werden kann. Danach sind einige Arbeitsblätter zu einzelnen Themen zu finden.

Für einige Arbeitsblätter gibt es unterschiedliche Varianten für die Mittel- bzw. die Oberstufe. Für die Anzahl der ungeraden Knoten und das Handshaking Lemma werden beide Varianten gezeigt. Sowohl in der Art der Aufgabenstellungen als auch in der mathematischen Tiefe zeigt sich hier deutlich die Möglichkeit, dasselbe Thema auf unterschiedlichem Niveau zu bearbeiten.

Mathematische Modellierung durch Graphen

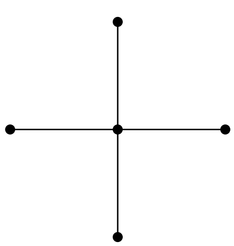
Um Fragestellungen wie z. B. die Optimierung von Wegen bearbeiten zu können, braucht man geeignete mathematische Modelle. In der Kombinatorische Optimierung verwendet man dafür **Graphen**.

Ein Graph ist ein Gebilde aus Knoten und Kanten. Es werden im weitesten Sinne Beziehungen von verschiedenen Objekten zueinander dargestellt. Hier ein paar kleine Beispiele:

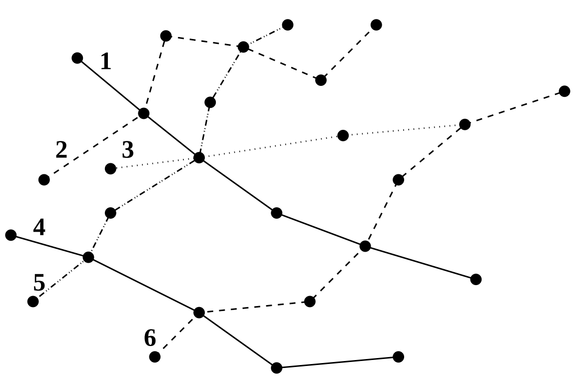


1. Was könnten diese Graphen darstellen? Geben Sie mehrere verschiedene Möglichkeiten an.

2. Dieser Graph soll eine Straßenkreuzung darstellen. Manchmal braucht man allerdings genauere Informationen über eine Kreuzung, z. B. welche Möglichkeiten es zum Abbiegen gibt. Zeichnen Sie einen Graphen, der die Kreuzung von zwei vierspurigen Straßen mit allen Abbiegemöglichkeiten darstellt.



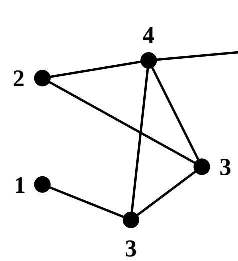
3. Sie sehen hier ein U-Bahn-Liniennetz. Die Zahlen geben die Liniennummern an. Zeichnen Sie einen Graphen, der darstellt, welche Linien sich kreuzen.



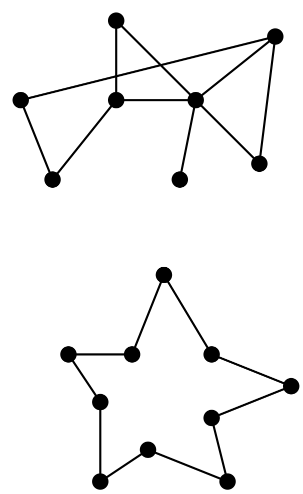
Graphen (Handshaking Lemma)

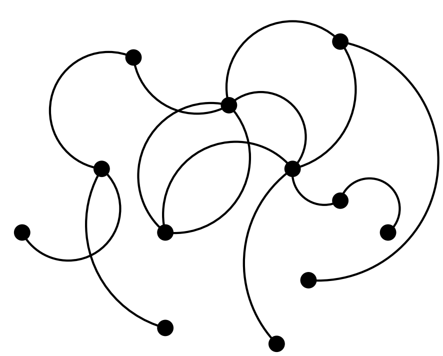
(Mittelstufe)

Die Zahl der Kantenenden, die in einen Knoten münden, nennt man den **Grad des Knotens**.
Die Bezeichnung dafür stammt aus dem Englischen: deg(v) „Degree of a vertex".
Hier ein Beispiel (die Zahlen an den Knoten geben den Knotengrad an):



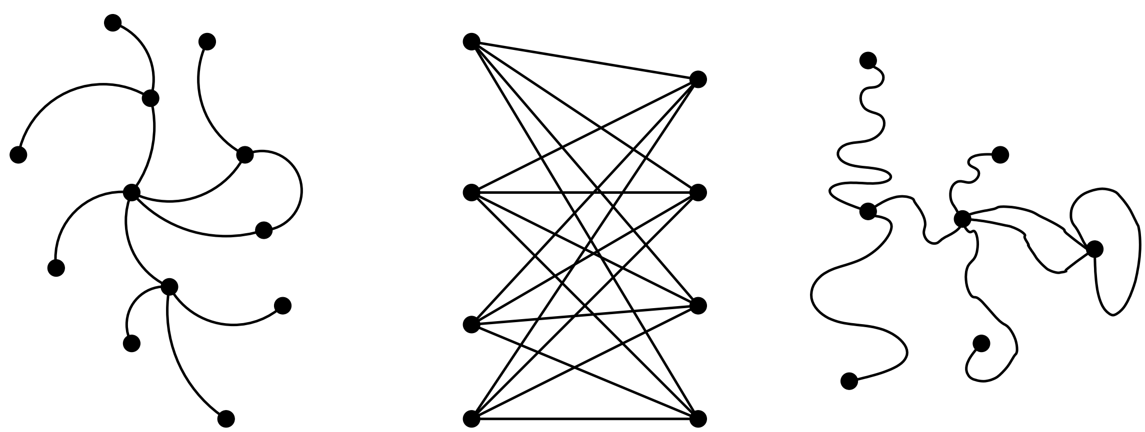
- Bestimme in den folgenden Beispielen die Knotengrade.
- Bilde die Summe aller Knotengrade in einem Graphen.
- Zähle die Kanten in demselben Graphen.
- Was fällt auf? Formuliere deine Vermutung.
- Bastele dir noch einige weitere Beispiele und überprüfe die Vermutung.
- Versuche die Vermutung zu begründen.
- Dieses Resultat heißt „Handshaking Lemma" (Ein Lemma ist ein kleineres mathematisches Resultat). Was hat es mit „Hände schütteln" zu tun?





Knoten mit ungeradem Grad

(Mittelstufe)



1. Wieviele Knoten mit ungeradem Grad gibt es in den einzelnen Graphen?

2. Zeichne eigene Beispiele und zähle die Knoten mit ungeradem Grad.

3. Versuche Graphen zu zeichnen, die genau einen, genau drei oder genau fünf Knoten mit ungeradem Grad haben.

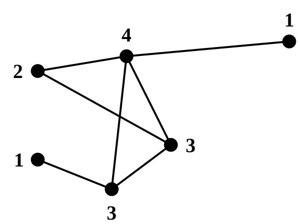
4. Was passiert mit den Knotengraden, wenn man in einem Graphen eine Kante hinzufügt oder löscht? Experimentiere mit eigenen Beispielen.

5. Formuliere eine Vermutung über die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad und versuche eine Begründung dafür zu finden.

Das „Handshaking Lemma“ und die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad

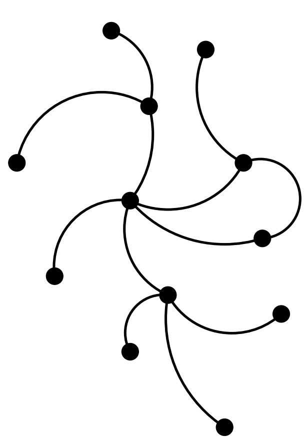
(Oberstufe)

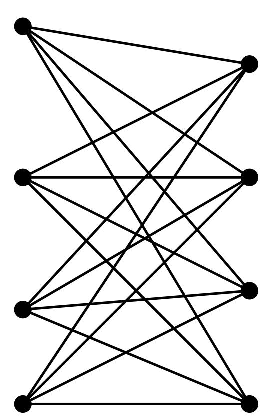
Die Zahl der Kantenenden, die in einen Knoten münden, nennt man den
Grad des Knotens.
Die Bezeichnung dafür stammt aus dem Englischen: deg(v) „Degree of a vertex“.
Hier ein Beispiel (die Zahlen an den Knoten geben den Knotengrad an):

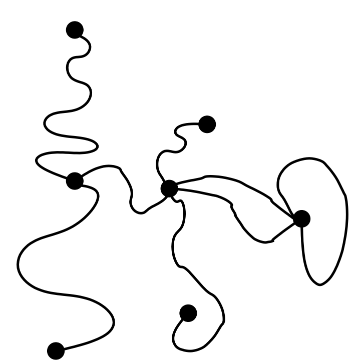


Aufgabe 1: Zwischen der Summe aller Knotengrade in einem Graphen und der Anzahl der Kanten in demselben Graphen gibt es einen Zusammenhang, das sogenannte „Handshaking Lemma“ (*Ein Lemma ist ein kleines mathematische Resultat bzw. ein Hilfssatz*).
a) Versuchen Sie diesen Zusammenhang anhand von Beispielen zu finden.
b) Formulieren Sie die Aussage und begründen (bzw. beweisen) Sie diese.
c) Welche Interpretation des Graphen legt der Name des Lemmas nahe?

Aufgabe 2: Zeichnen Sie einen Graphen, der genau fünf Knoten mit ungeradem Grad hat.
Hinter dieser Aufgabe steckt ein Satz über die Anzahl ungerader Knoten.
Formulieren und beweisen Sie den Satz.







Isomorphie von Graphen

(Material für Lehrerinnen und Lehrer)

Definition: Zwei Graphen sind isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihren Knotenmengen gibt, die die Inzidenzen (also die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Knoten) erhält.

Was ist der „Witz“ an der Isomorphie? Graphen können verschieden gezeichnet werden, ohne an Informationsgehalt zu verlieren. Das liegt daran, dass es bei Graphen an sich nur um die Beziehungsstruktur geht und nicht um die konkret gezeichnete Länge der Kanten. Kantenlängen werden, falls sie benötigt werden, als Kantengewichte bereitgestellt.

Eine Möglichkeit, den Isomorphiebegriff relativ schnell und auch gut nachvollziehbar einzuführen, ist, von Datenstrukturen für Graphen auszugehen. In diesen Datenstrukturen ist keine geometrische Information enthalten. Häufig verwendete Datenstrukturen sind: Nachbarschaftslisten, Inzidenz- und Adjazenzmatrizen.

Vorausgegangen sollten sein: Beschäftigung mit Graphen in irgendeinem Kontext, evtl. Graphenalgorithmen.

Ansatzpunkt: Wie kann man einen Graphen so darstellen, dass man ihn dem Computer eingeben kann?

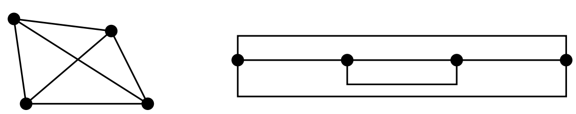
Daraus folgen Überlegungen zu Datenstrukturen für Graphen: Nachbarschaftslisten, Inzidenz- und Adjazenzmatrizen. Nach einer kurzen Diskussion über verschiedene Schülervorschläge (vermutlich werden Koordinaten vorgeschlagen, die aber z. B. bei einem Graphen, der Freundschaftsbeziehungen darstellen soll, gar nicht vorhanden sind) kann man ohne „Vorwarnung“ verschiedene Inzidenzmatrizen in die Klasse geben, mit dem Auftrag, den zugehörigen Graphen zu zeichnen. Falls die Idee der Adjazenzmatrix nicht schon vorher aufgetaucht ist, müssen die Schülerinnen und Schüler sich hier selbständig mit den vorgegebenen Daten auseinandersetzen und versuchen, diese sinnvoll zu interpretieren. Wenn es dann klar ist, welche Informationen in der Matrix stehen, wird sich die Frage stellen, wie denn die Knoten liegen sollen und so ist man schon mitten im Thema angelangt.

Der Begriff „Matrix“ sollte übrigens nicht von der Behandlung des Themas abschrecken. Eine Matrix ist zunächst einmal nichts anderes als eine Tabelle.

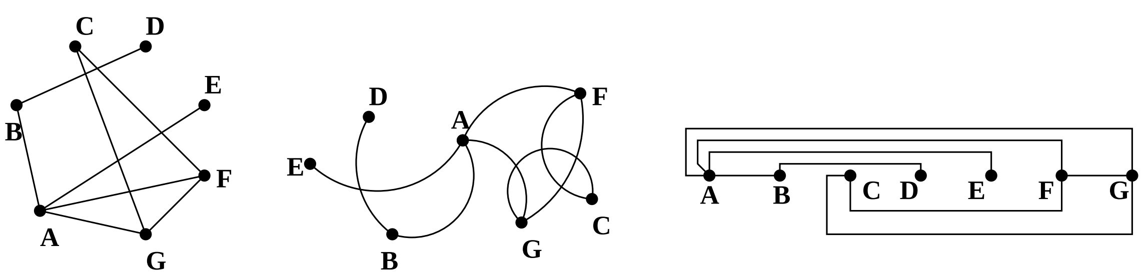
Die Schülerinnen und Schüler zeichnen ihre Graphen. Währenddessen kann man an der Rückseite der Tafel die eigenen Versionen der Graphen anbringen. Wenn alle fertig sind, lautet die Aufgabe: Welcher der Graphen an der Tafel entspricht dem selber gezeichneten? Die vier verschiedenen hier vorgeschlagenen Graphen haben charakteristische Eigenschaften: eine Schleife, ein nicht verbundener Knoten, ein fast vollständiger Graph und einer, bei dem ein Knoten mit allen anderen verbunden ist. Daher fällt es den Schülerinnen und Schülern nicht schwer, ihren eigenen Graphen denen an der Tafel zuzuordnen.

Jetzt kann man isomorphe Graphen folgendermaßen definieren: Zwei Graphen sind isomorph, wenn sie (bei entsprechender Benennung der Knoten) die gleiche Matrix (oder Tabelle) besitzen.

Nun folgt ein Arbeitsblatt zum Erkennen von isomorphen Graphen. Hier ist noch wichtig zu betonen, dass es nicht ausreicht, Knoten und Kanten zu zählen und evtl. noch die Knotengrade zu vergleichen. Das Arbeitsblatt bietet hierfür Gegenbeispiele, z. B. diese beiden Graphen:



Die Isomorphie hat man erst gezeigt, wenn die Knoten jeweils so bezeichnet wurden, dass entsprechende Knoten gleiche Bezeichnungen bekommen haben, z.B. so:



Mögliche Weiterführung: Matrizen für gerichtete Graphen, für gewichtete Graphen, für Graphen mit Mehrfachkanten, Inzidenzmatrizen. Siehe dazu Arbeitsblatt „Datenstrukturen für Graphen: Matrizen“.

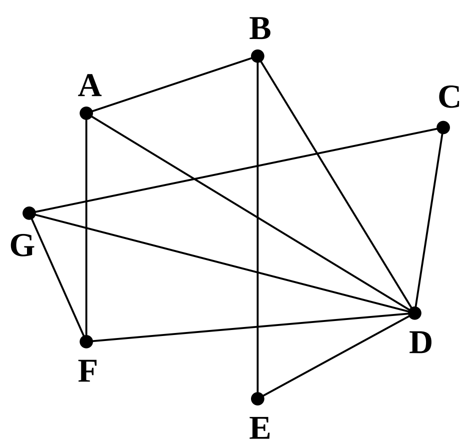
Anlagen:
4 verschiedene Adjazenzmatrizen (für die Schülerinnen und Schüler),
Darstellungen dieser Graphen (am Besten auf DIN A3 vergrößern) für die Tafel,
Arbeitsblatt „Isomorphie“, Arbeitsblatt „Datenstrukturen für Graphen: Matrizen“.

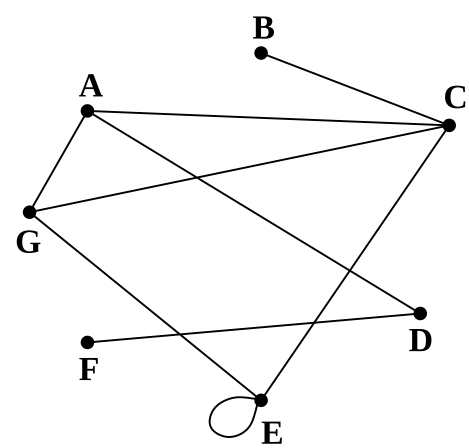
	A	B	C	D	E	F	G
A	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
B	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
C	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
D	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
E	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
F	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
G	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**

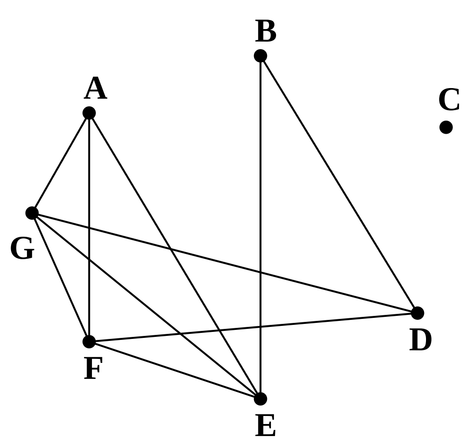
	A	B	C	D	E	F	G
A	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
B	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
C	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
D	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
E	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
F	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
G	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**

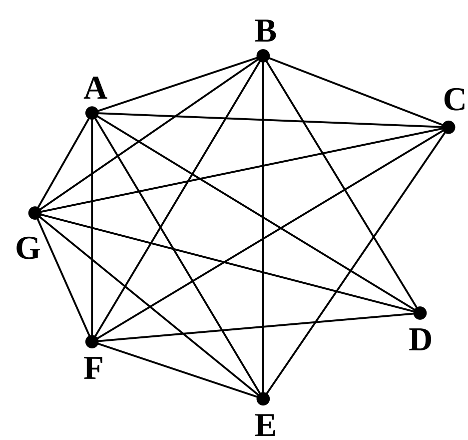
	A	B	C	D	E	F	G
A	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
B	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
C	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
D	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
E	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
F	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
G	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**

	A	B	C	D	E	F	G
A	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
B	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
C	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
D	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
E	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
F	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
G	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**


A
B
C
D
E
F
G

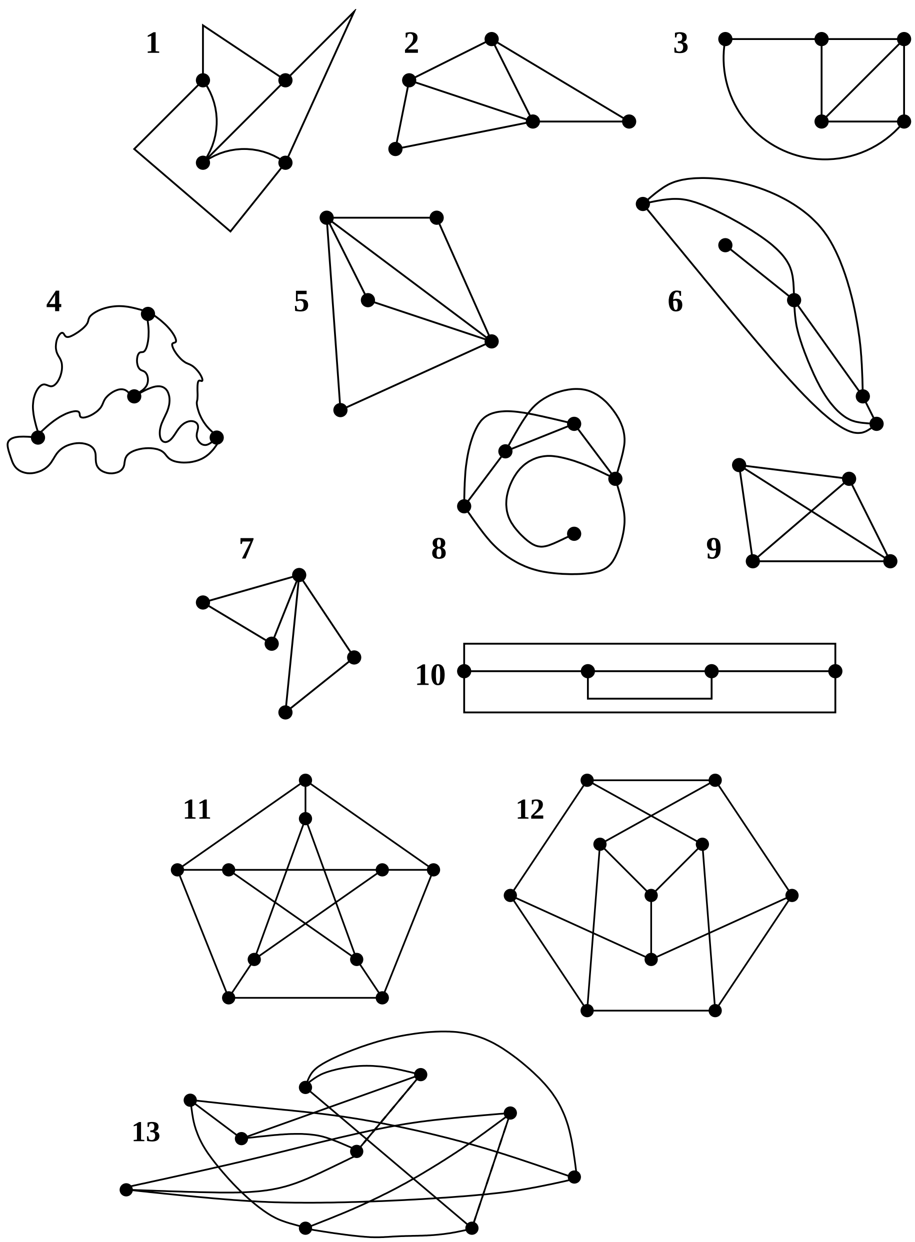

A
B
C
D
E
F
G


A
B
C
D
E
F
G


A
B
C
D
E
F
G

Isomorphie von Graphen

Welche dieser Graphen sind isomorph?



Datenstrukturen für Graphen: Matrizen

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1{,}3 & 4 & 2 \\ 1 & 1{,}3 & 2{,}5 & 0 & 34 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 6{,}7 \\ 1 & 2 & 34 & 6{,}7 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Interpretieren Sie diese Matrizen!
(Überlegen Sie z. B.: Welche Informationen beinhalten diese Matrizen? Was könnte bei den ungewöhnlicheren Matrizen gemeint sein? Was erfährt man über die einzelnen Graphen ohne sie zeichnen zu müssen? Was kann man nicht direkt aus der Matrix ablesen?)

Die Müllabfuhr optimieren

In diesem Gebiet sollen die Stadtreinigungsbetriebe einmal pro Woche den Müll abholen. Es steht dafür nur ein Müllauto zur Verfügung. Optimieren Sie den Weg, den das Müllauto dabei zurücklegt.

Hier wird ein Stadtplanausschnitt rund um die Schule eingefügt.

Die Briefzustellung optimieren

In diesem Gebiet soll die Post ausgetragen werden. Optimieren Sie den Weg des Postboten oder der Postbotin.

Hier wird ein Stadtplanausschnitt rund um die Schule eingefügt.

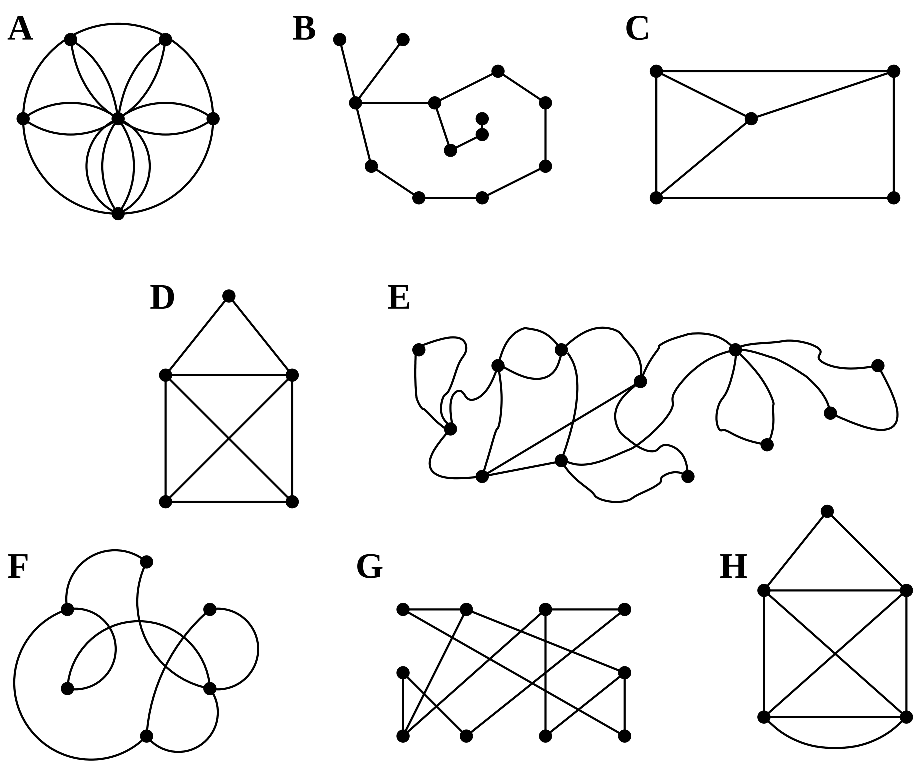
Euler-Touren

(Mittelstufe)

- Welche der Figuren kann man in einem Zug und ohne doppelte Linien zeichnen?

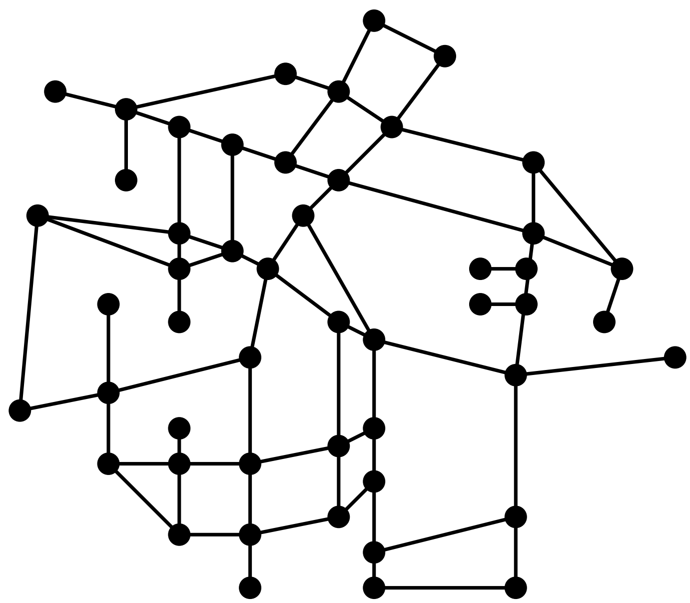
- Bei manchen Figuren kann man nicht in jedem beliebigen Knoten anfangen. Was unterscheidet die Anfangsknoten von den anderen?

- Woran kann man erkennen (nur durch „hingucken“), ob eine Figur ohne abzusetzen und ohne doppelte Linien gezeichnet werden kann, wenn man es nicht direkt ausprobieren will oder kann, z. B. weil es eine riesengroße Figur ist?
  Bastele dir selber Beispiele (im Heft): Figuren, bei denen man sogar wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt; Figuren, die man zwar ohne Absetzen zeichnen kann, bei denen man aber woanders endet, als man angefangen hat; Figuren, bei denen man den Stift zwischendurch anheben muss, um sie zu zeichnen. Beobachte, woran es liegt, ob man ohne abzusetzen zeichnen kann. Schreibe deine Beobachtungen ins Heft.



Der Postboten-Rundweg in einem Graphen

Gibt es eine (Rund-)Tour, die jede Kante *genau* einmal besucht? Warum?



Gibt es Graphen, bei denen eine solche Rundtour möglich ist?
Experimentiere mit selbst erfundenen Graphen.

Bei manchen Graphen kann man nicht in jedem beliebigen Knoten anfangen (z. B. beim „Haus vom Nikolaus“).
Was unterscheidet die Anfangsknoten von den anderen?

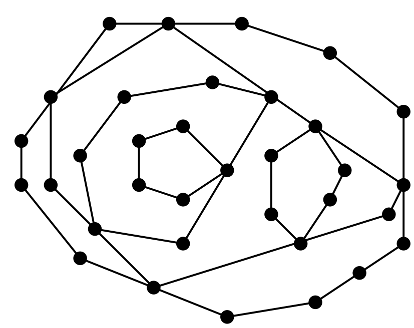
Woran kann man erkennen (nur durch „hingucken“), ob eine Figur ohne abzusetzen und ohne doppelte Linien gezeichnet werden kann, wenn man es nicht direkt ausprobieren will oder kann, z. B. weil es eine riesengroße Figur ist?

Der „Zwiebelschalen-Algorithmus“

Ein Algorithmus zum Finden von Euler-Touren in eulerschen Graphen ist der „Zwiebelschalen-Algorithmus“. Er „schält“ den Graphen Schicht um Schicht.
Er beginnt so:

1. Wähle einen beliebigen Knoten als Startknoten. Markiere ihn.
2. Gehe entlang einer Kante zum nächsten Knoten.
   Markiere die besuchten Kanten und Knoten.
   Wiederhole dies solange, bis du wieder am Startknoten ankommst.
3. Gehe nun entlang dem eben konstruierten Kreis, bis du einen Knoten triffst, in den noch unmarkierte Kanten münden. Nimm diesen Knoten als neuen Startknoten und wiederhole 2. und 3.
   Gibt es in dem eben konstruierten Kreis keinen Knoten mit noch unmarkierten Kanten, so gehe zurück in den vorherigen Kreis und wiederhole 3.

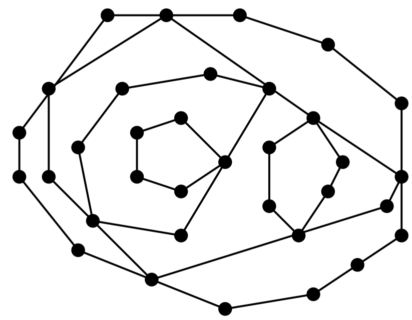
I. Führe den Algorithmus an dem folgenden Graphen aus. Nimm für jede Wiederholung von 2. und 3. eine neue Farbe. (Um zu sehen, woher der Algorithmus seinen Namen hat, arbeite dich von außen nach innen vor.)



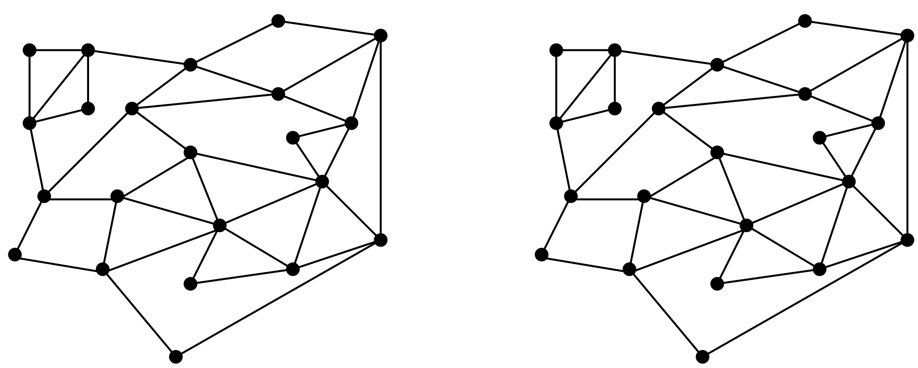
II. Kann es passieren, dass man bei 2. „stecken bleibt“, bevor man wieder beim Startknoten angekommen ist? Warum?

III. Wie entsteht aus den einzelnen Schichten die Euler-Tour?
Formuliere eine Anweisung, die den Algorithmus weiterführt:

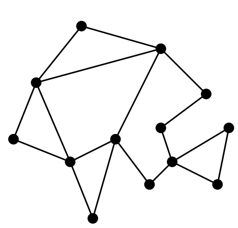
Zeichne die fertige Euler-Tour in die zweite Kopie des Graphen ein. Nummeriere dabei die Kanten in der Reihenfolge, in der du sie besuchst.



IV. Führe den Zwiebelschalen-Algorithmus an diesem Graphen durch. Nimm dieses Mal die „Froschperspektive" des Computers ein: Der Computer „sieht" immer nur den Knoten, auf dem er sich befindet, und die Kanten, die von diesem Knoten abgehen. Er hat keine Ahnung, wie der gesamte Graph aussieht, d. h. er wählt die nächste Kante immer ganz zufällig.
Nimm wieder eine neue Farbe, sobald du einen neuen Kreis beginnst.



V. Versuche einen Algorithmus zu finden, der gleich eine Euler-Tour konstruiert (ohne Zwischenschritte wie z. B. die Konstruktion von kleineren Kreisen, die erst später zu einer Tour zusammengefasst werden). Hier ein kleiner Graph zum Ausprobieren:



Das Problem des Handelsreisenden

oder auch: Das Travelling-Salesman-Problem (TSP)

Eine Handelsvertreterin muss verschiedene Städte im Rheinland bereisen. Sie möchte eine Rundreise machen, die möglichst kurz sein soll.

Hier eine Entfernungstabelle:

	Aachen	Bonn	Düsseldorf	Frankfurt	Köln	Wuppertal
Aachen	-	91	80	259	70	121
Bonn	91	-	77	175	27	84
Düsseldorf	80	77	-	232	47	29
Frankfurt	259	175	232	-	189	236
Köln	70	27	47	189	-	55
Wuppertal	121	84	29	236	55	-

Suchen Sie Strategien, mit denen man solche möglichst kurze Rundreisen konstruieren kann. Probieren Sie Ihre Strategien mit verschiedenen Startorten aus.

Konstruktionsheuristiken für das Travelling-Salesman-Problem

Das Travelling-Salesman-Problem („Finde eine kürzeste Rundreise, die durch jeden Knoten genau einmal führt“) gehört zu den Problemen, für die es vermutlich keine effizienten Algorithmen (d. h. Algorithmen, die auch für sehr große Beispiele in praxistauglicher Zeit optimale Lösungen konstruieren) geben kann *(Ob dies tatsächlich so ist, ist eines der großen offenen Probleme der Mathematik)*. Daher muss man sich damit begnügen, sogenannte **Heuristiken** anzuwenden, die einigermaßen gute Lösungen konstruieren, aber eben nicht unbedingt das Optimum erzeugen. Außerdem kann man **untere Schranken** finden, so dass man eine Idee bekommt, wie weit man mit so einer heuristisch erzeugten Lösung vom Optimum entfernt ist.

Um solche Heuristiken zu finden, bietet es sich an, auf Verfahren zurück zu greifen, die man schon kennt und die schnell arbeiten, z. B. den Algorithmus von Kruskal zur Konstruktion minimaler aufspannender Bäume.

Aufgaben:

Entwickeln Sie Heuristiken, die Rundreisen konstruieren!
Versuchen Sie, die Vorgehensweisen so präzise wie möglich zu formulieren.
Probieren Sie Ihre Verfahren aus.

A) Ändern Sie den Algorithmus von Kruskal so ab, dass er eine möglichst kurze Rundreise konstruiert.

B) Beginnen Sie mit der Konstruktion eines minimalen aufspannenden Baumes. Wie kann aus diesem aufspannenden Baum eine möglichst kurze Rundreise werden?

C) Beginnen Sie mit einer Rundreise durch 3 Knoten. Konstruieren Sie eine möglichst kurze Rundreise durch alle Knoten, indem sie die 3-Knoten-Tour geschickt erweitern.

Hier ein Beispielgraph:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	-	5	6	3	8	4	9	9	4
B	5	-	9	5	12	11	3	8	8
C	6	9	-	3	3	1	1	5	4
D	3	5	3	-	13	6	4	5	7
E	8	12	3	13	-	12	14	3	6
F	4	11	1	6	12	-	14	3	6
G	9	3	1	4	14	14	-	11	3
H	9	8	5	5	3	3	11	-	10
I	4	8	4	7	6	6	3	10	-

7.3 Schülerprodukte und -äußerungen

In allen Klassen, in denen Unterrichtsversuche durchgeführt wurden, wurden in der letzten Stunde Fragebögen verteilt. Diese Fragebögen dienten in erster Linie der persönlichen Rückmeldung für die Lehrerin. Sie sind nicht für eine systematische Auswertung angelegt worden. Aber sie enthalten eine Reihe von interessanten Äußerungen, die viele der in den vorherigen Kapiteln herausgearbeiteten Thesen bestätigen.

Die aufschlussreichsten Antworten sind im Folgenden nach Klassenstufen geordnet zusammengestellt.[21] Dabei wurden keinesfalls die negativen Äußerungen weggelassen – es gibt fast keine!

Neben den Fragebögen liegen unterschiedliche Schülerprodukte vor: Ein Test der 8. Klasse und Unterrichtsprotokolle des Leistungskurses Klasse 13. Auszüge daraus werden ebenfalls dokumentiert und kommentiert, um einen Einblick in die Ergebnisse des Unterrichts zu geben.

7.3.1 Fragebogen Klasse 8

Die meisten Schülerinnen und Schüler dieser Klasse haben die Fragebögen sehr gewissenhaft ausgefüllt. An einigen Stellen kommt der schwäbische Dialekt durch (Tübingen). Auffallend häufig wird erwähnt, es sei zu einfach gewesen. Ein Schüler sagte vor der Klassenarbeit ganz entsetzt: „Das haben ja alle verstanden, da schreiben ja alle eine Eins!“ Sowohl der Eindruck im Unterricht als auch das Ergebnis der Klassenarbeit (der Notendurchschnitt war nicht besser als in anderen Klassenarbeiten dieser Klasse) bestätigten dies nicht. Daraufhin wurden weitere Methoden zur Förderung eines Fehlerbewusstseins für Algorithmen (siehe Kapitel 6) entwickelt, z. B. das Rollenspiel.

- *Wie hat dir das Thema gefallen?*
  - Besser als Mathe. Sehr Gut
  - Es war interessant
  - Sehr gut, da es sehr abwechslungsreich ist.
  - Des war halt mal was anderes u. hat au Spaß gemacht.
  - Ich glaube, ich bin nicht die/der einzigste aus der Klasse, der/dem es Spaß gemacht hat
  - Besser wie alle anderen.
  - Ich fand es sehr gut!!!
  - Gut, es hat viel Spaß gemacht, mal etwas anderes als Rechnen

[21] Rechtschreib- und Interpunktionsfehler wurden dabei nicht korrigiert, sondern die Schreibweisen der Schüler/innen unverändert übernommen.

- *Würdest du gerne mehr über diskrete Mathematik erfahren?*
  - Ja, es ist auch interessanter über etwas zu lernen, das jeden Tag benötigt wird.
  - Ja, auf jeden Fall.

- *War im Unterricht genügend Zeit, um selber nachzudenken und auszuprobieren?*
  - viel zu viel
  - ja
  - Ein bisschen mehr Zeit könnte man geben, ist aber nicht nötig.
  - Eigendlich schon, es sei denn man isch mal auf der Leitung gesessen.
  - Ja, aber das mit dem Telefonnetz in Baden-Württemberg hätte ich gerne länger gemacht

- *War der Unterricht zu einfach/zu schwierig? Warum?*
  - Es war leicht, wenn man aufgepasst hat. Keine Ahnung warum (wenig Stoff?)
  - Manchmal musste man schon etwas nachdenken, aber wenn man es kapiert hat, war es sogar <u>zu</u> einfach.
  - Man konnte immer selber was rausfinden, hats aber spätestens beim erklären kapiert.

- *Was hat dir noch gefallen/nicht gefallen?*
  - Das man viel selber machen durfte hat mir gefallen und das Daumenkino
  - gut: Antworten nicht in mundgerechten Häppchen vorgekaut, sondern selber ausprobieren müssen.
  - Dass Diskrete Mathematik noch erforscht wird
  - Man muss wenig rechnen
  - Des mit dem Computer an der Tafel [der „dumme Computer“]
  - Die Art des Unterrichts
  - man musste nie viel rechnen
  - Dass wir den Algorithmus so oft gemacht haben fand ich nicht so gut.
  - Das Daumenkino
  - man hat mehr gelernt, wie ein Computer funktioniert.
  - Gut, da Mathe nicht immer eine perfekte Antwort, Lösung hat.

7.3.2 Fragebogen Klasse 9

Die Fragebogenantworten dieser Klasse fielen zum Großteil sehr einsilbig aus, daher sind viele nicht sehr aufschlussreich. Ein durchaus alterstypisches generelles Desinteresse herrschte in dieser nicht sehr leistungsstarken Klasse vor. Einige der etwas ausführlicheren Antworten zeigen aber doch, dass der Unterricht über das Thema (das chinesische Postbotenproblem) als sehr anders als der übliche Mathematikunterricht wahrgenommen wurde.

- *Wie hat dir das Thema gefallen?*
  - Sehr gut!!
  - Ich fand das Thema in Ordnung. Manchmal ein bisschen langweilig aber Lehrreich
  - interessant und aufschlussreich
  - eigentlich ganz ordentlich
  - naja
  - Mehr oder weniger!!!!! War auf jeden Fall besser als „normaler“ Matheunterricht
  - teilweise ein bisschen kompliziert, aber interessant
  - Besser als das „normale“ Mathe. Aber Unterricht ist Unterricht.
- *Was würdest du im Unterricht anders machen?*
  - Ich würde den Unterricht vielleicht ein bisschen „strenger machen“, weil das Thema/die Themen wirklich interessant sind.
- *War im Unterricht genügend Zeit, um selber nachzudenken und auszuprobieren?*
  - Ja, ich finde schon, vor allem dadurch, dass es so viele Arbeitsblätter gab, an denen man herumexperimentieren konnte.
- *Was hat dir noch gefallen/nicht gefallen?*
  - Mir hat das ganze Thema sehr gut gefallen. (Ich habe mich immer auf die Mathestunde gefreut)
  - die hohen Zahlen haben mir gefallen [Dies bezieht sich auf die kombinatorische Explosion.]
  - Das man wusste, wozu es nützlich ist!!
  - Das selber ausprobieren
  - Das selber machen oder auf der Folie hat mir gefallen.

7.3.3 Fragebogen Profilkurse Klasse 11

In den Antworten der Klassenstufe 11 steht der Anwendungsbezug am stärksten im Vordergrund. Insgesamt wurde der Unterricht über kombinatorische Optimierung sehr positiv aufgenommen.

- *Wie hat Ihnen das Thema gefallen?*
  - Das Thema war interessant und ein interessanter Teil der Mathematik, weil man einen starken Bezug zum normalen Leben hat.
  - Da das Thema auch in der Praxis z. B. für U-Bahn-Fahrpläne Anwendung findet ist meiner Meinung nach mehr Motivation vorhanden als bei der sonst „trockenen“ Mathematik
  - Das Thema war interessant, da es ein völlig anderes Themengebiet der Mathematik behandelte als der normale Mathematikunterricht.

- *An was aus dem Unterricht werden Sie sich vermutlich auch in einigen Jahren noch erinnern?*
  - Vermutlich werde ich mich noch lange Zeit an die Diskussionen über kürzeste U-Bahnwege erinnern. Da ich viel mit U-Bahn und Bus fahre, werde ich öfter daran denken müssen.
  - Einiges, da es anders als der normale Unterricht war.
  - Das BFS- und DFS bzw. FIFO und LIFO-Verfahren wird mir eine bleibende Erinnerung (möglicherweise gar mit praktischer Anwendungsmöglichkeit) sein.
  - Mit Sicherheit an die Breitensuche, da wir diese ausführlich besprochen und sehr intensiv selber angewendet haben. Allgemein werde ich mich an das Thema erinnern, da es ein Thema der Mathematik ist, welches einem täglich im Leben begegnet.
  - Solche Projekte zwischen Universitäten und Schulen sollten stärker gefördert werden.

7.3.4 Fragebogen Leistungskurs Klasse 13

Die Begeisterung für das Thema war einhellig, in dieser Gruppe gab es keine einzige negative Antwort. Die Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 13 gaben gut reflektierte und differenzierte Antworten. Sie sind bereits in der Lage, den Unterricht von einer Metaebene aus zu betrachten. Das macht ihre Äußerungen besonders interessant. Das Fehlen von Formeln und Lösungsrezepten und die (über lange Strecken) selbständige Erarbeitung werden von mehreren positiv erwähnt, ebenso der Anwendungs- und Alltagsbezug. Die Antworten zu der vierten hier angeführten Frage heben deutlich die erlernten Problemlösekompetenzen hervor.

- *Wie hat Ihnen das Thema gefallen?*
  - Perfekt! Total beeindruckend. Das Thema hat mich so vereinnahmt, dass ich über Wege auf meinem Duschvorhang nachgedacht habe.
  - [...] Man konnte gut frei arbeiten und eigene Ideen entwickeln
  - gut, interessant, wirft spannende Aspekte der Mathematik in Verbindung mit der Realität auf
  - Ich fand das Thema interessant. Es war etwa komplett anderes, als der normale Unterrichtsstoff (Gleichungen, Formeln, Zahlen) ich fand es gut, einen neuen Bereich kennen zu lernen.
  - Es war eine nette Abwechslung zum alltäglichen Stoff, dazu noch nützlich und anregend.
  - Ich bin ehrlich gesagt, positiv von dem Thema überrascht. Mal eine ganz andere Unterrichtsmethode.
  - Interessant, weil es mal etwas anderes war, aber schwer fassbar am Anfang, weil man keine konkreten Anhaltspunkte, keine konkreten Lösungen/Lösungsverfahren hatte. Man konnte gut frei arbeiten und eigene Ideen entwickeln.

- *Hat sich Ihr Bild von Mathematik oder Ihre Einstellung zur Mathematik durch die Arbeit an dem Thema verändert? Wenn ja, wie?*
  - Man hat gesehen, dass nicht alles nur konkret auf Formeln zurückzuführen ist. Außerdem hat man mal eine direkte Anwendung von theoretischen mathematischen Problemstellungen erfahren. Mathematiker sind in meinen Augen also nicht mehr die bloßen Theoretiker.
  - Einstellung zu Mathe nicht verändert, aber der Mathe-Horizont hat sich stark erweitert.
  - Wie gesagt, ist dieses Thema nicht nur theoretisch mit Zahlen und Formeln aufgebaut, so dass man mit vielen praktischen Arbeiten und Selbstversuche auf eine Lösung stößt. Ich hätte mich ohne diese Unterrichtsstunden nie mit dem Thema beschäftigt und hätte auch nie gedacht, dass das was mit Mathe zu tun hat.
  - Es war ein gutes Beispiel für die Nützlichkeit der Mathematik im Alltag, selbst und vor allem bei komplizierten Problematiken, wie die Optimierung von Wegen.

- *Fanden Sie den Anteil an selbständiger Arbeit angemessen? Wie beurteilen Sie Ihren eigenen Lernerfolg dabei?*
  - Die Selbstständige Arbeit im Unterricht war angemessen. Wenn nicht sogar ein wenig zu viel. Beim selbstständigen Lernen wird man gezwungen mitzuarbeiten und das ist gut so! Deshalb ist der Lernerfolg bei selbstständiger Arbeit besonders hoch. In meinem Fall ebenfalls.

  - Selbstständige Arbeit war sehr gut, so das man seinen eigenen Kopf anstrengen musste und man sich Überlegungen über Lösungsansätze machen musste. Allerdings sollte die Gruppenstärke nicht zu groß sein.
  - [. . .] Denken wird nicht gleich vom Lehrer kanalisiert.
  - Ja! Mit der Hilfe der Gruppenarbeit sind wir auf viele Ideen und Ansätze gestoßen, die im Nachhinein in der großen Gruppe geklärt wurden. Die selbständige Arbeit hat mir sehr gut gefallen, und ich erzielte dabei wirkliche Lernerfolge
  - Man konnte selbst viele Ideen und Anregungen entwickeln, da man nicht vorher konkrete Aussagen/Angaben bekommen hat. Dadurch konnte man testen, wie man selbst auf eigener Logik basierend, sich dem Problem widmen könnte.
  - Ich fand es gut, dass man wirklich mal selbstständig arbeiten, eigene Ideen entwickeln konnte, allerdings ist es schwierig, wenn man kaum Feedback bekommt, außer dass man „auf dem richtigen Weg“ ist. Ein wenig mehr Lenkung in bestimmte Richtungen wäre gut. Man war gezwungen, sich intensiv damit zu beschäftigen – gut!
  - Das selbstständige Arbeiten auf einem neuen Gebiet ohne Merksätze oder Formeln, aber mit eigenen Ideen u. Überlegungen. Ein bisschen wie Knobeln.

- *Haben Sie etwas gelernt, das Sie auch unabhängig vom Thema gebrauchen können? Was?*
  - . . . dass es immer mehrere Herangehensweisen gibt und man nicht so schnell aufzugeben braucht, auch wenn man nicht beim ersten Versuch gleich die perfekte Lösung findet und wenn die Aufgabenstellung zu komplex wirkt.
  - Ja, ich habe gelernt anders Probleme anzugehen. Umwege zu laufen, um das Ziel zu erreichen. Oder erst kleine Dinge/Sachen erreichen und diese später miteinander zu verknüpfen.
  - Das der Fahrtweg eines Müllautos hochwissenschaftlich ist. Wie kann ich Alltagsdinge schneller, profitabler, ergonomischer ausführen, so dass der Weg und die Zeit möglichst kurz bleibt, die man dafür aufbringt
  - Neben der Intensivierung meiner selbständigen Arbeit, kann ich die Einsicht mit in die Zukunft nehmen, dass man nicht so skeptisch an neue Dinge und Erfahrungen herangehen soll, da auch sie, so wie diese im Unterricht über die Diskrete Mathematik gemachten, nützlich sein können.
  - Selbstständiges Denken.

- *Haben Sie weitere Kommentare/Kritik/Anregungen?*
  - Vielleicht mögen andere Schüler das Thema nicht, weil man selbst überlegen muss und sich nicht an Formeln klammern kann.

- evtl. wäre es anschaulicher, wenn man ein Computerprogramm nutzen könnte, das beispielsweise das Müllauto die Straßen abfahren lässt.
- Öfter solche Einschübe in den normalen Lehrplan einfügen!

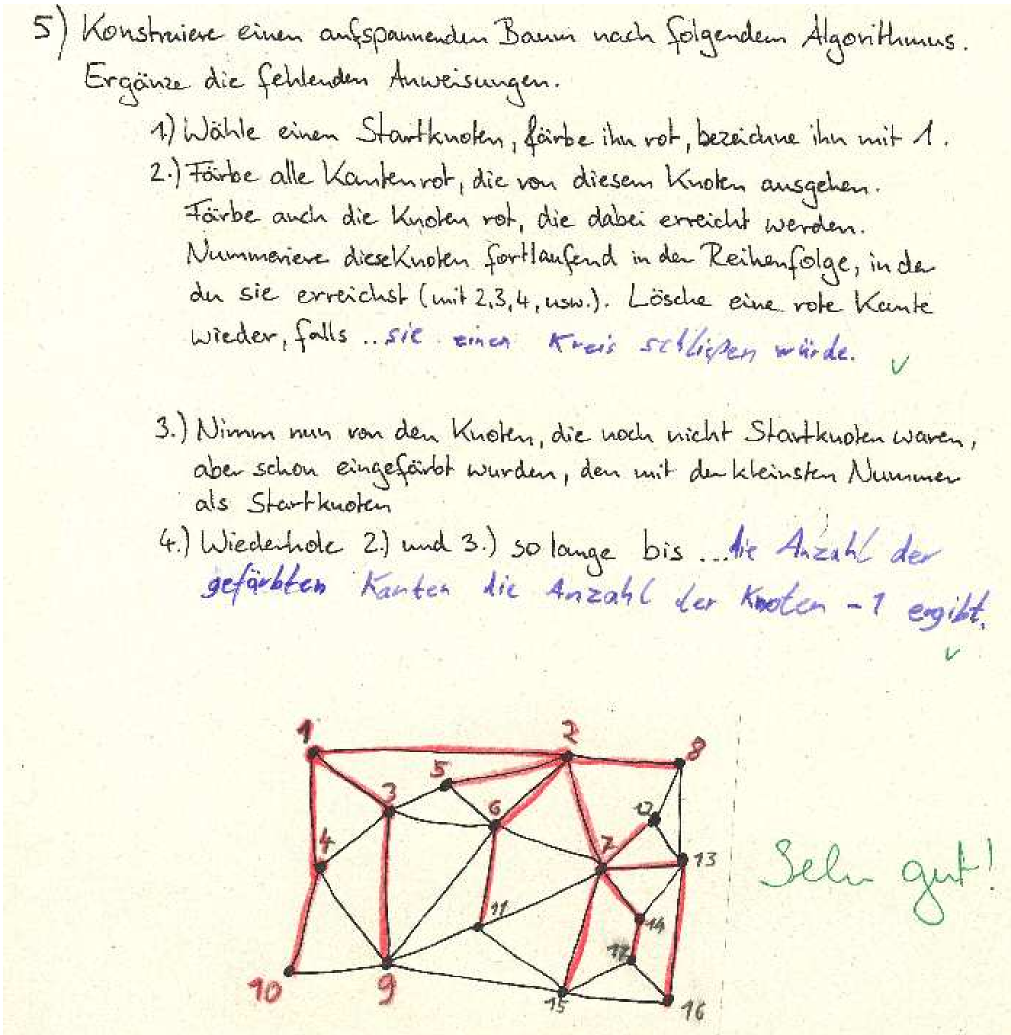
7.3.5 Test Klasse 8

Die Ergebnisse des Tests zeigen, dass der Umgang mit Graphen diesen Achtklässlern wenig Probleme bereitete. Die Aufgabenstellungen bezogen sich auf: aufspannende Bäume einzeichnen; begründen, warum ein eingezeichneter Teilgraph kein aufspannender Baum ist; anhand einer Matrix einen Graphen zeichnen; erkennen und begründen, ob Graphen zueinander isomorph sind.

Im zweiten Teil sollten die Anweisungen eines Algorithmus zur Konstruktion eines aufspannenden Baumes (Breitensuche) lückentextartig ergänzt werden (es fehlten die Kreisfreiheit und das Abbruchkriterium) und der Algorithmus dann an einem gegebenen Graphen durchgeführt werden. Im Unterricht war die Tiefensuche, nicht aber die Breitensuche behandelt worden. Das Ergänzen der Anweisungen war für die meisten Schülerinnen und Schüler kein Problem. Die Durchführung des Algorithmus auf dem Graphen machte hingegen mehr Schwierigkeiten (nur 8 von 32 Lösungen waren korrekt, eine davon ist in Abb. 26 zu sehen). Die Hauptschwierigkeit bestand in der richtigen Nummerierung der Knoten und dabei den Überblick zu behalten. Solch ein Vorgehen wurde im Unterricht nicht geübt und war daher ungewohnt und unter der Anspannung in einer Testsituation sehr fehlerträchtig. Grundsätzlich aber eignet sich die Durchnummerierung der markierten Knoten bzw. Kanten sehr gut, um die Vorgehensweise nachvollziehbar zu machen.

Die letzte Aufgabe bestand darin, einen (im Unterricht besprochenen) Algorithmus zur Konstruktion minimaler aufspannender Bäume anzugeben. Hier wurden einige Fehler im Hinblick auf die Präzision des Aufschreibens gemacht, häufiger aber wurde nicht beachtet, dass *minimale* aufspannende Bäume konstruiert werden sollten. Die Abbildungen 27, 28 zeigen unterschiedliche richtige Lösungen. Die Abbildungen 29 und 30 zeigen Lösungen, die im Prinzip richtig sind, aber Unklarheiten in der Formulierung besitzen. In den Abbildungen 31 und 32 sind Lösungen zu sehen, die mittels der Tiefensuche aufspannende Bäume konstruieren sollen. Es wurde übersehen, dass minimale aufspannende Bäume erzeugt werden sollten.

Die letzten beiden Beispiele zeigen deutlich die Schwierigkeiten beim Formulieren von Algorithmen, mit denen insbesondere Schülerinnen und Schüler der unteren Mittelstufe zu kämpfen haben. Beide Schüler könnten vermutlich auf einem gegebenen Graphen anhand ihrer Anweisungen fehlerfrei einen aufspannenden Baum konstruieren. Sie sind aber (noch) nicht in der Lage, ihre Vorgehensweisen allgemeinverständlich zu kommunizieren und dokumentieren. In dieser Klasse (dort fand der erste der Unterrichtsversuche statt) wurde noch nicht mit dem vollen Repertoire der in Kapitel 6 beschriebenen Methoden zur Veranschaulichung von Algorithmen gearbeitet.



5) Konstruiere einen aufspannenden Baum nach folgendem Algorithmus. Ergänze die fehlenden Anweisungen.

1.) Wähle einen Startknoten, färbe ihn rot, bezeichne ihn mit 1.

2.) Färbe alle Kanten rot, die von diesem Knoten ausgehen. Färbe auch die Knoten rot, die dabei erreicht werden. Nummeriere diese Knoten fortlaufend in der Reihenfolge, in der du sie erreichst (mit 2,3,4, usw.). Lösche eine rote Kante wieder, falls ..sie einen Kreis schließen würde. ✓

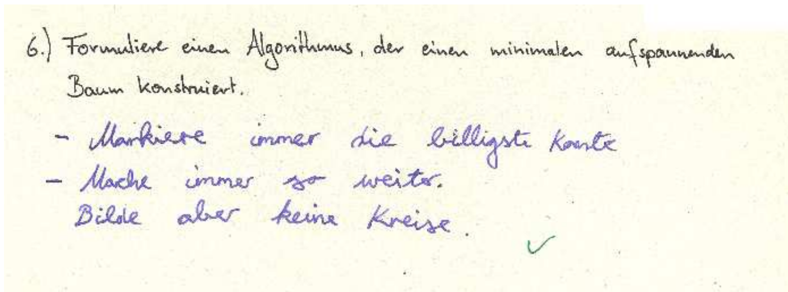
3.) Nimm nun von den Knoten, die noch nicht Startknoten waren, aber schon eingefärbt wurden, den mit der kleinsten Nummer als Startknoten

4.) Wiederhole 2.) und 3.) so lange bis ...die Anzahl der gefärbten Kanten die Anzahl der Knoten −1 ergibt. ✓

Sehr gut!

Abbildung 26: Eine gelungene Durchführung der Breitensuche (Test Kl. 8).

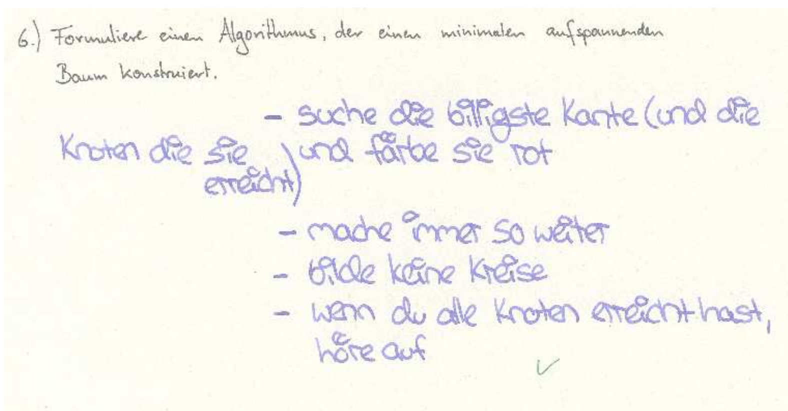
Notenverteilung und -durchschnitt unterschieden sich kaum von anderen Klassenarbeiten derselben Klasse.



6.) Formuliere einen Algorithmus, der einen minimalen aufspannenden Baum konstruiert.

- Markiere immer die billigste Kante
- Mache immer so weiter.
  Bilde aber keine Kreise.

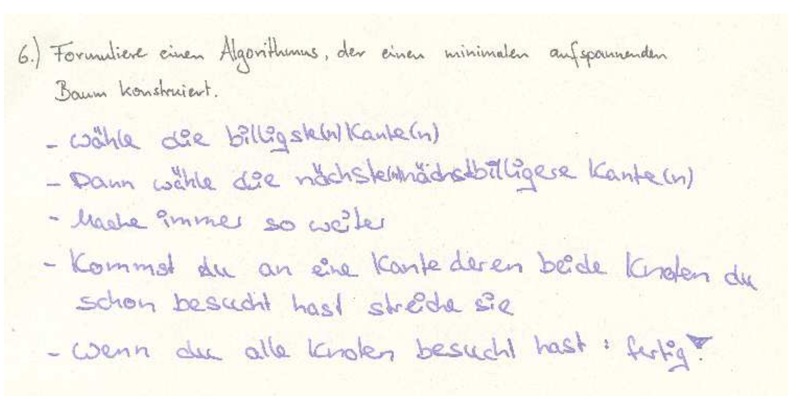
Abbildung 27: Eine sehr kurze Fassung des Algorithmus von Kruskal (Test Kl. 8).



6.) Formuliere einen Algorithmus, der einen minimalen aufspannenden Baum konstruiert.

- suche die billigste Kante (und die Knoten die sie erreicht) und färbe sie rot
- mache immer so weiter
- bilde keine Kreise
- wenn du alle Knoten erreicht hast, höre auf

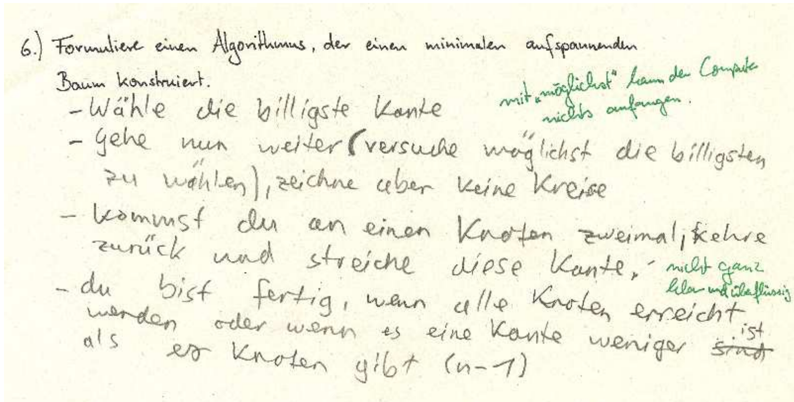
Abbildung 28: Eine etwas detailliertere Beschreibung des Algorithmus von Kruskal (Test Kl. 8).



6.) Formuliere einen Algorithmus, der einen minimalen aufspannenden Baum konstruiert.

- wähle die billigste(n) Kante(n)
- Dann wähle die ~~nächste(n)~~ nächstbilligese Kante(n)
- Mache immer so weiter
- Kommst du an eine Kante deren beide Knoten du schon besucht hast streiche sie
- Wenn du alle Knoten besucht hast : fertig!

Abbildung 29: Richtig gedacht, aber nicht geschrieben, woran man schon besuchte Knoten erkennt (Test Kl. 8).

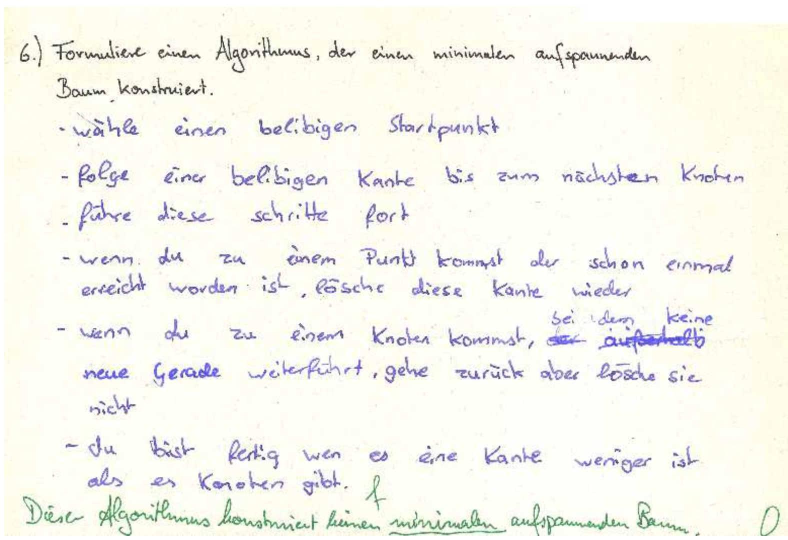

6.) Formuliere einen Algorithmus, der einen minimalen aufspannenden Baum konstruiert.

- Wähle die billigste Kante
- gehe nun weiter (versuche möglichst die billigsten zu wählen), zeichne aber keine Kreise
- kommst du an einen Knoten zweimal, kehre zurück und streiche diese Kante.
- du bist fertig, wenn alle Knoten erreicht werden oder wenn es eine Kante weniger ist ~~sind~~ als es Knoten gibt (n-1)

mit „möglichst" kann der Computer nichts anfangen.

nicht ganz klar und überflüssig

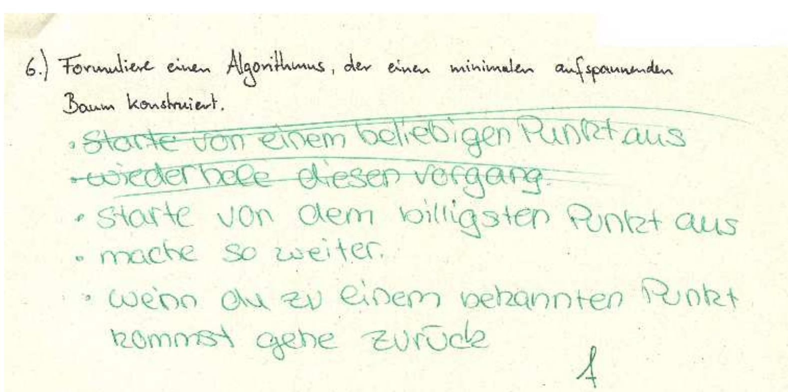
Abbildung 30: Das richtige (zeichnerische) Vorgehen im Kopf, aber keine eindeutigen Anweisungen, (z. B. „möglichst") (Test Kl. 8).


6.) Formuliere einen Algorithmus, der einen minimalen aufspannenden Baum konstruiert.

- wähle einen belibigen Startpunkt
- folge einer belibigen Kante bis zum nächsten Knoten
- führe diese schritte fort
- wenn du zu einem Punkt kommst der schon einmal erreicht worden ist, lösche diese Kante wieder
- wenn du zu einem Knoten kommst, ~~der außerhalb~~ bei dem keine neue Gerade weiterführt, gehe zurück aber lösche sie nicht
- du bist fertig wen es eine Kante weniger ist als es Knoten gibt. f

Dieser Algorithmus konstruiert keinen minimalen aufspannenden Baum. 0

Abbildung 31: Dies ist eine etwas ungenaue Beschreibung der Tiefensuche (Test Kl. 8).


6.) Formuliere einen Algorithmus, der einen minimalen aufspannenden Baum konstruiert.

- ~~Starte von einem beliebigen Punkt aus~~
- ~~wiederhole diesen Vorgang.~~
- starte von dem billigsten Punkt aus
- mache so weiter.
- wenn du zu einem bekannten Punkt kommst gehe zurück

f

Abbildung 32: Hier bleibt noch einiges unklar. Dennoch könnte die Schülerin vermutlich zeichnerisch eine korrekte Lösung finden (Test Kl. 8).

7.3.6 Erarbeitungsprotokolle Leistungskurs Klasse 13

Der Unterricht im Leistungskurs 13 wurde zum Großteil von selbständiger Erarbeitung in Kleingruppen getragen. Die Schülerinnen und Schüler führten in Erarbeitungsprotokollen Buch über ihren Erarbeitungsweg. Da die Lerngruppe keine Erfahrung in der Arbeit mit Lerntagebüchern hatte, wurde diese abgeschwächte (nicht dialogische) Form der Dokumentation gewählt, um dennoch ein wenig Einblick in die Forschungsarbeit der Schülerinnen und Schüler zu bekommen. Zusätzlich gab es während der Arbeitsphasen in Gruppen viel Gelegenheit zum Gespräch mit einzelnen Schülerinnen und Schülern oder einzelnen Gruppen. Die Inhalte der Gespräche fließen teilweise in die Deutung der schriftlichen Dokumente ein.

Auf dem Protokollblatt, das in Abb. 33 zu sehen ist, sieht man deutlich die Wirkung der Lochblende. Oben auf der Seite stehen die von der Lehrerin gegebene Definition und die Aufgabenstellung. Darunter stehen Notizen zu den ersten eigenen Versuchen, auf einem Eulergraphen eine Eulertour zu konstruieren. Es wird festgestellt, „Wir sind bei beiden Möglichkeiten an die Grenzen gestoßen.“ Der Einsatz der Lochblende wird mit Ausrufezeichen kommentiert, was wie ein „Heureka!“ wirkt. Darunter ist dann eine erste Formulierung des Zwiebelschalen-Algorithmus zu sehen. Durch die Lochblende werden die geometrisch orientierten weiter oben beschriebenen Herangehensweisen unmöglich gemacht. Das Vorgehen reduziert sich auf das Konstruieren von Kreisen und das Erkennen, ob von einem Knoten noch unbesuchte Kanten abgehen. Damit liegen die benötigten Werkzeuge, um den Algorithmus unabhängig von speziellen Beispielgraphen oder bestimmten Repräsentationsformen formulieren zu können, schlagartig auf der Hand.

Zusätzlich zu der schönen Dokumentation der Wirkung der Lochblende zeigt das Protokollblatt den unkomplizierten Umgang mit verschiedenen Darstellungen von Graphen. Graphenzeichnung und Adjazenzmatrix stehen direkt nebeneinander. Rechts neben der Matrix wurde anhand der Zeilensummen geprüft, ob der Graph auch tatsächlich eulersch ist. Auf der Graphenzeichnung wurden mit dem Stift Kantenzüge abgefahren. Das gleichzeitige Arbeiten auf enaktiver, ikonischer und symbolischer Ebene wird hier sichtbar.

Das nächste Protokollblatt (einer anderen Schülerin) in Abb. 34 zeigt in der oberen Hälfte Experimente zum Finden einer Eulertour und in der unteren Hälfte zwei Ausformulierungen des Zwiebelschalen-Algorithmus. Der erste Versuch, der in einer Phase selbständiger Gruppenarbeit erstellt wurde, arbeitet mit der Adjazenzmatrix, aber nicht konsequent, und er wurde nicht zu Ende geführt. Der zweite Versuch (am linken Rand) ist der Mitschrieb aus der Stunde, in der der Algorithmus als Rollenspiel durchgeführt wurde. Hier ist eine deutlich bessere Strukturierung zu erkennen.

Der Versuch eines Schülers, das Vorgehen doch noch in eine „Formel“ zu packen ist in Abb. 35 abgedruckt. Noch ist er allerdings nicht so weit, ganz ohne eine geometrische Vorstellung und damit in vollster Allgemeinheit zu arbeiten.

22.04.05

Ein Graph, der nur Knoten mit geradem Grad hat, heißt $\boxed{\text{Eulergraph}}$

Wie findet man einen Rundweg in einem geeigneten Graphen?
Formulieren Sie eine für jeden leicht auszuführende Schritt-für-Schritt Anweisung, die in jedem geeigneten Graphen funktioniert!

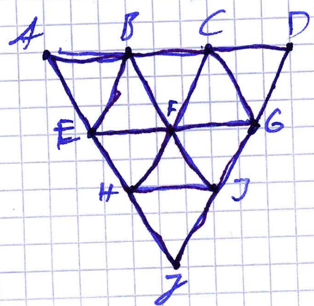
2 Wege/Varianten in Betracht gezogen:

a) von außen nach innen (Schneckenhaus)

b) ~~immer~~ zuerst den längsten Weg

Wir sind bei beiden Möglichkeiten an die Grenzen gestoßen.

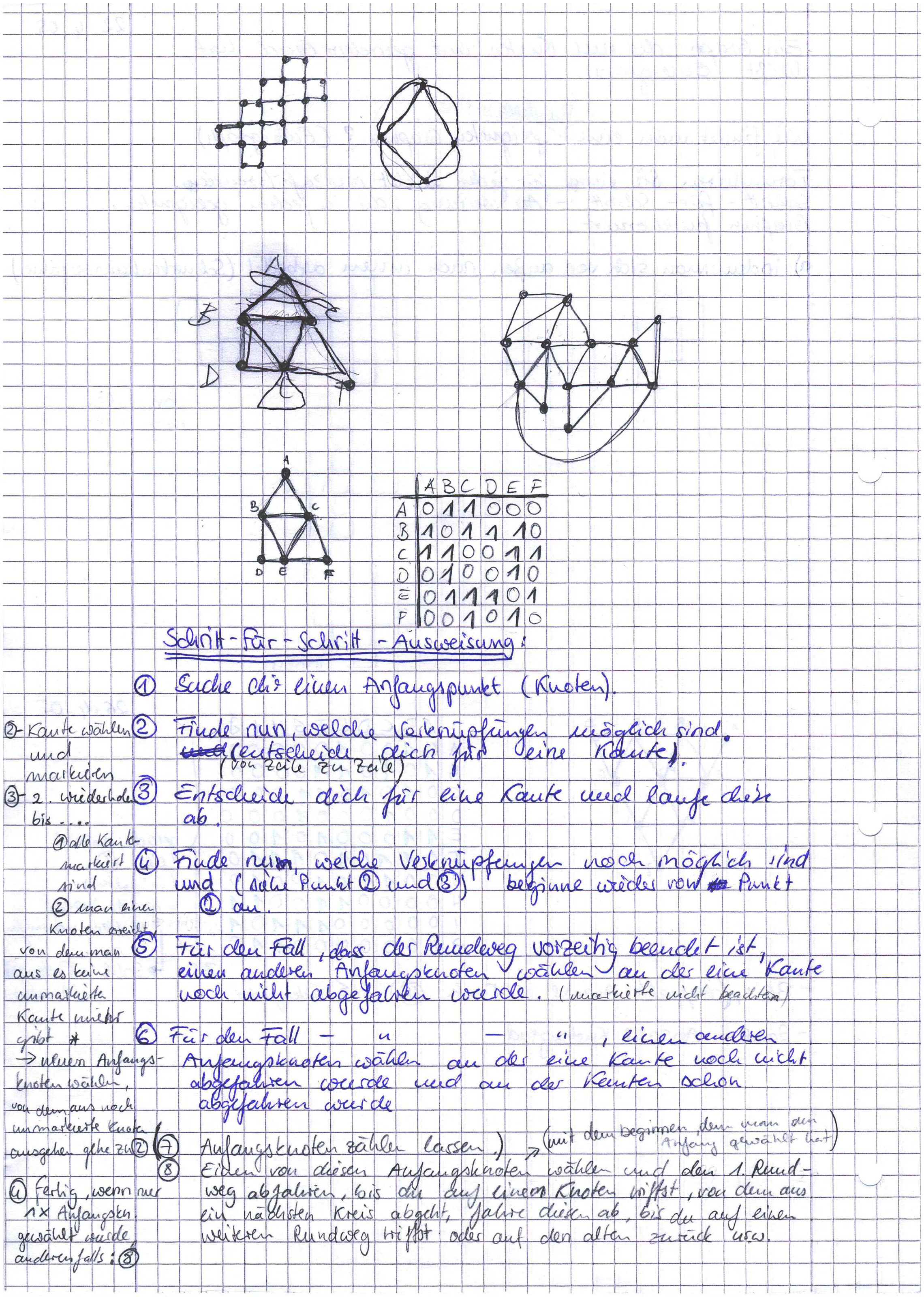
26.04.05



	A	B	C	D	E	F	G	H	J	J		
A	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	A	2
B	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	B	4
C	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	C	4
D	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	D	2
E	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	E	4
F	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	F	6
G	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	G	4
H	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	H	4
J	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	J	4
J	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	J	2
												36

Mit Lochschablone den Weg abgehen!
Läuft immer Rundwege. Kann einen Rundweg finden, so dass noch Kanten „offen" sind. Sucht sich bei den Kanten, die noch nicht abgelaufen sind wieder einen Rundweg. Im Anschluss verknüpft er die beiden (oder mehreren) Rundwege.

Abbildung 33: Ein Dokument über die Wirkung der Lochblende (Leistungskurs 13).



	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	0	0	0
B	1	0	1	1	1	0
C	1	1	0	0	1	1
D	0	1	0	0	1	0
E	0	1	1	1	0	1
F	0	0	1	0	1	0

Schritt-Für-Schritt-Ausweisung:

① Suche dir einen Anfangspunkt (Knoten).

② Finde nun, welche Verknüpfungen möglich sind. ~~und~~ (entscheide dich für eine Kante). (von Zeile zu Zeile)

③ Entscheide dich für eine Kante und laufe diese ab.

④ Finde nun, welche Verknüpfungen noch möglich sind und (siehe Punkt ② und ③) beginne wieder von Punkt ① an.

⑤ Für den Fall, dass der Rundweg vorzeitig beendet ist, einen anderen Anfangsknoten wählen an der eine Kante noch nicht abgefahren wurde. (markierte nicht beachten)

⑥ Für den Fall – " – ", einen anderen Anfangsknoten wählen an der eine Kante noch nicht abgefahren wurde und an der Kanten schon abgefahren wurde

(⑦ Anfangsknoten zählen lassen.) → (mit dem beginnen, den man den Anfang gewählt hat)

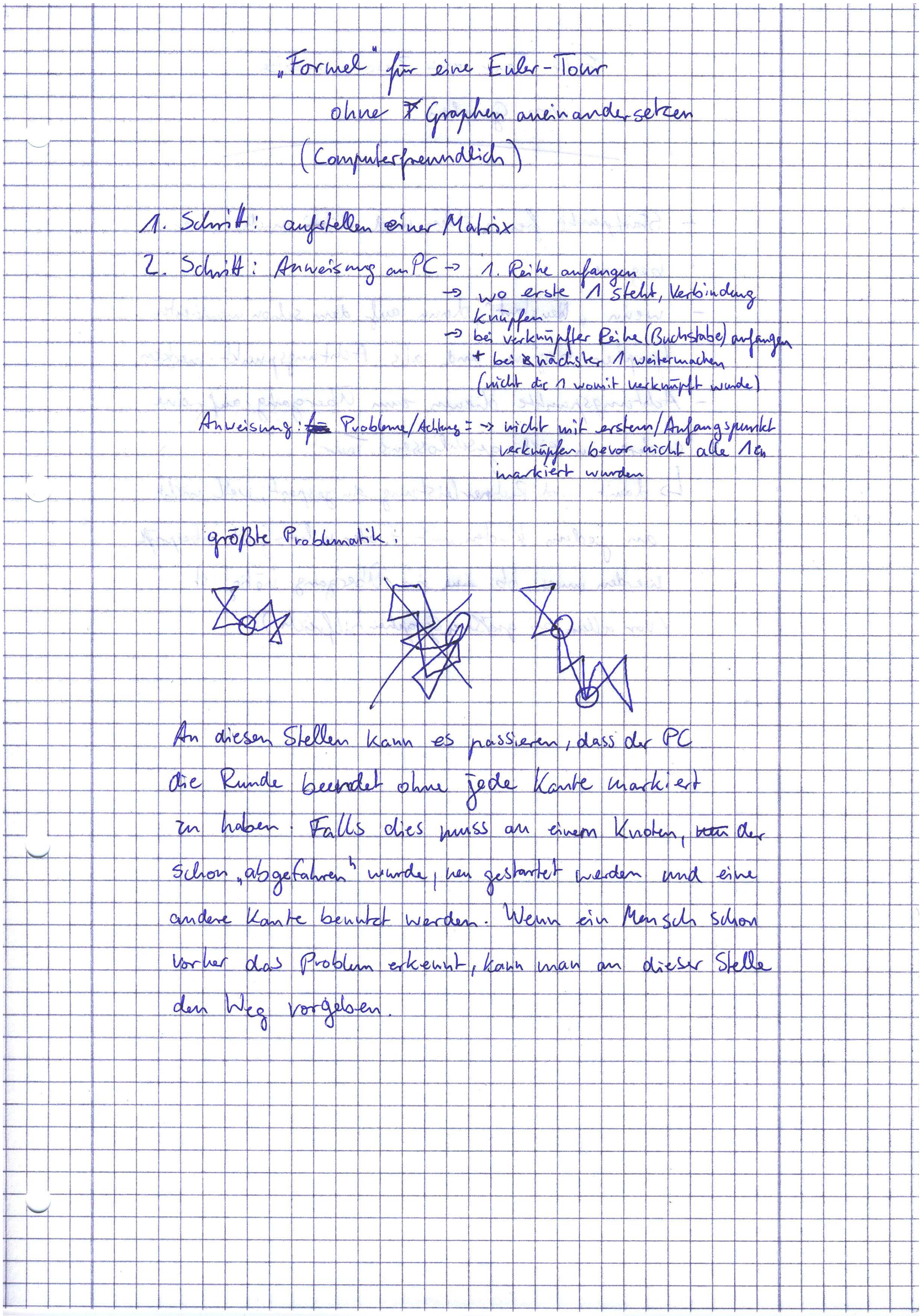
⑧ Einen von diesen Anfangsknoten wählen und den 1. Rundweg abfahren, bis du auf einen Knoten triffst, von dem aus ein nächsten Kreis abgeht, fahre diesen ab, bis du auf einen weiteren Rundweg triffst oder auf den alten zurück usw.

② – Kante wählen und markieren

③ – 2. wiederholen bis ...
① alle Kanten markiert sind
② man einen Knoten erreicht, von dem man aus es keine unmarkierte Kante mehr gibt *
→ neuen Anfangsknoten wählen, von dem aus noch unmarkierte Kanten ausgehen gehe zu ②

④ Fertig, wenn nur 1x Anfangskn. gewählt wurde andernfalls: ⑧

Abbildung 34: Algorithmus zur Konstruktion von Eulertouren vor und nach Durchführung des Algorithmen-Rollenspiels (LK 13).



„Formel“ für eine Euler-Tour
ohne Graphen aneinandersetzen
(Computerfreundlich)

1. Schritt: aufstellen einer Matrix
2. Schritt: Anweisung an PC → 1. Reihe anfangen
→ wo erste 1 steht, Verbindung knüpfen
→ bei verknüpfter Reihe (Buchstabe) anfangen
\+ bei nächster 1 weitermachen
(nicht die 1 womit verknüpft wurde)

Anweisung: ~~für~~ Probleme/Achtung! → nicht mit erstem/Anfangspunkt verknüpfen bevor nicht alle 1en markiert wurden

größte Problematik:

An diesen Stellen kann es passieren, dass der PC die Runde beendet ohne jede Kante markiert zu haben. Falls dies muss an einem Knoten, der schon „abgefahren“ wurde, neu gestartet werden und eine andere Kante benutzt werden. Wenn ein Mensch schon vorher das Problem erkennt, kann man an dieser Stelle den Weg vorgeben.

Abbildung 35: Eine „Formel“ für den Computer: erster Versuch zu einem Algorithmus, der Euler-Touren konstruiert (LK 13).

Einen Beweisversuch für den Satz über die Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad in beliebigen Graphen zeigt die Abb. 36. Dieser Beweis verwendet einen Argumentationsgang, der aus dem Experimentieren (vgl. Abb. 12 in Kapitel 5) heraus entstanden ist. Es wurde beobachtet, wie sich sukzessives Hinzufügen von einzelnen Kanten auf die Knotengrade auswirkt. Dabei wurde eine doppelte Fallunterscheidung vorgenommen. Leider fehlt ein abschließender Text, der die so sauber dokumentierten Einzelfälle verallgemeinert zusammenfasst und daraus die zu beweisende Aussage ableitet. Der Argumentationsgang eines anderen Schülers ist in Abb. 37 zu sehen.

Ein Beispiel für die Arbeit im „Graphenlabor“ ist Abbildung 38. Hier ist die Suche nach dem Kriterium für Eulergraphen dokumentiert. Es sind dort unterschiedlichste Graphen zu sehen. Die Zusammenfassung der Ergebnisse ganz unten auf der Seite sind besonders interessant. Hier wurden die drei unterschiedlichen für die Fragestellung relevanten Graphentypen erkannt und auf das Wesentliche reduziert: Gibt es zwei Knoten ungeraden Grades, so muss in dem einen begonnen und in dem anderen geendet werden, gibt es nur gerade Knoten, so ist eine ggf. in sich verschlungene Eulertour möglich. Gibt es vier oder mehr ungerade Knoten, so zeigt der reduzierte Graph, dass eine Tour ohne den Stift abzusetzen nicht mehr geht. Die schriftliche Ausformulierung dieser Gedanken ist in Abb. 39 abgedruckt.

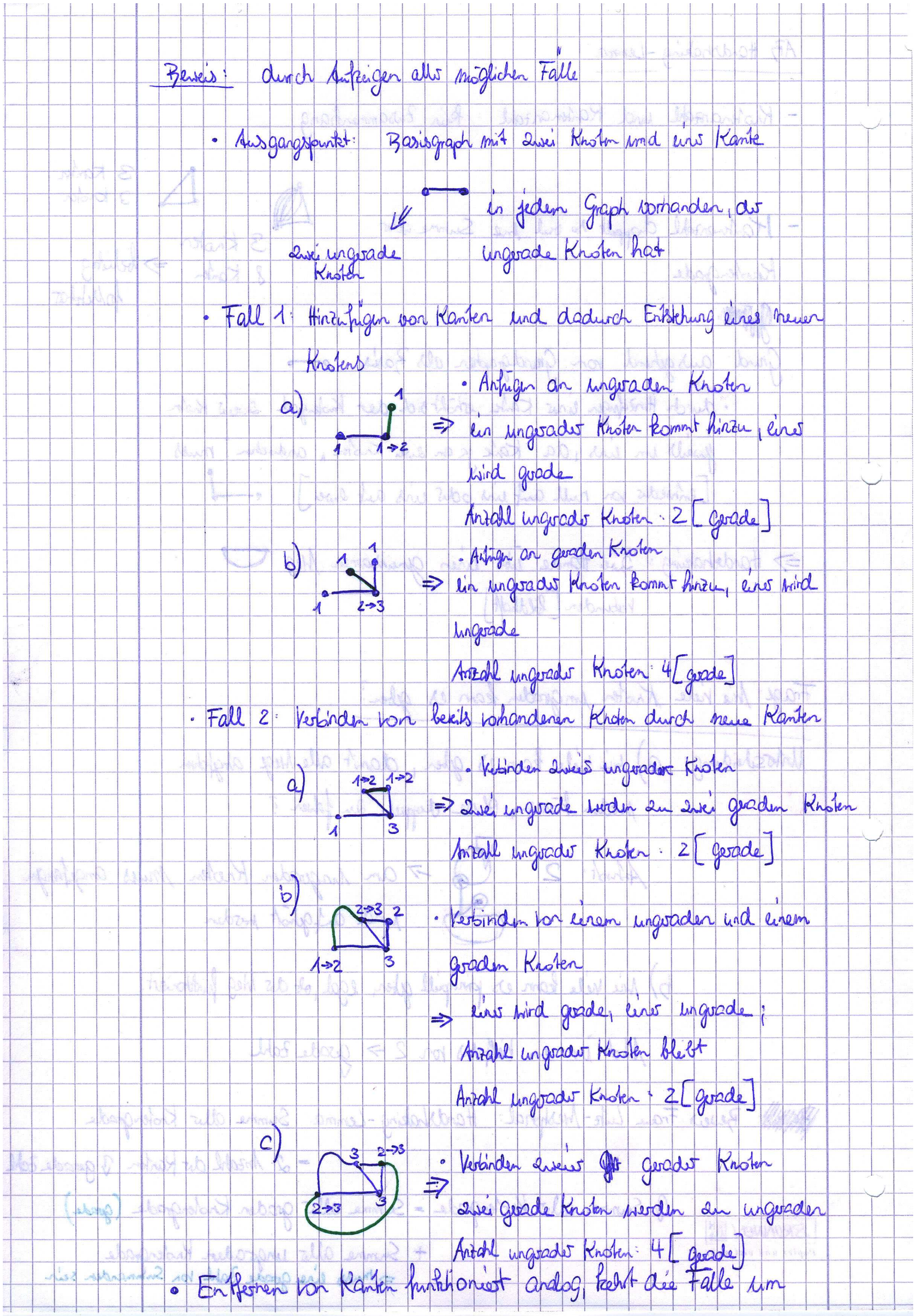
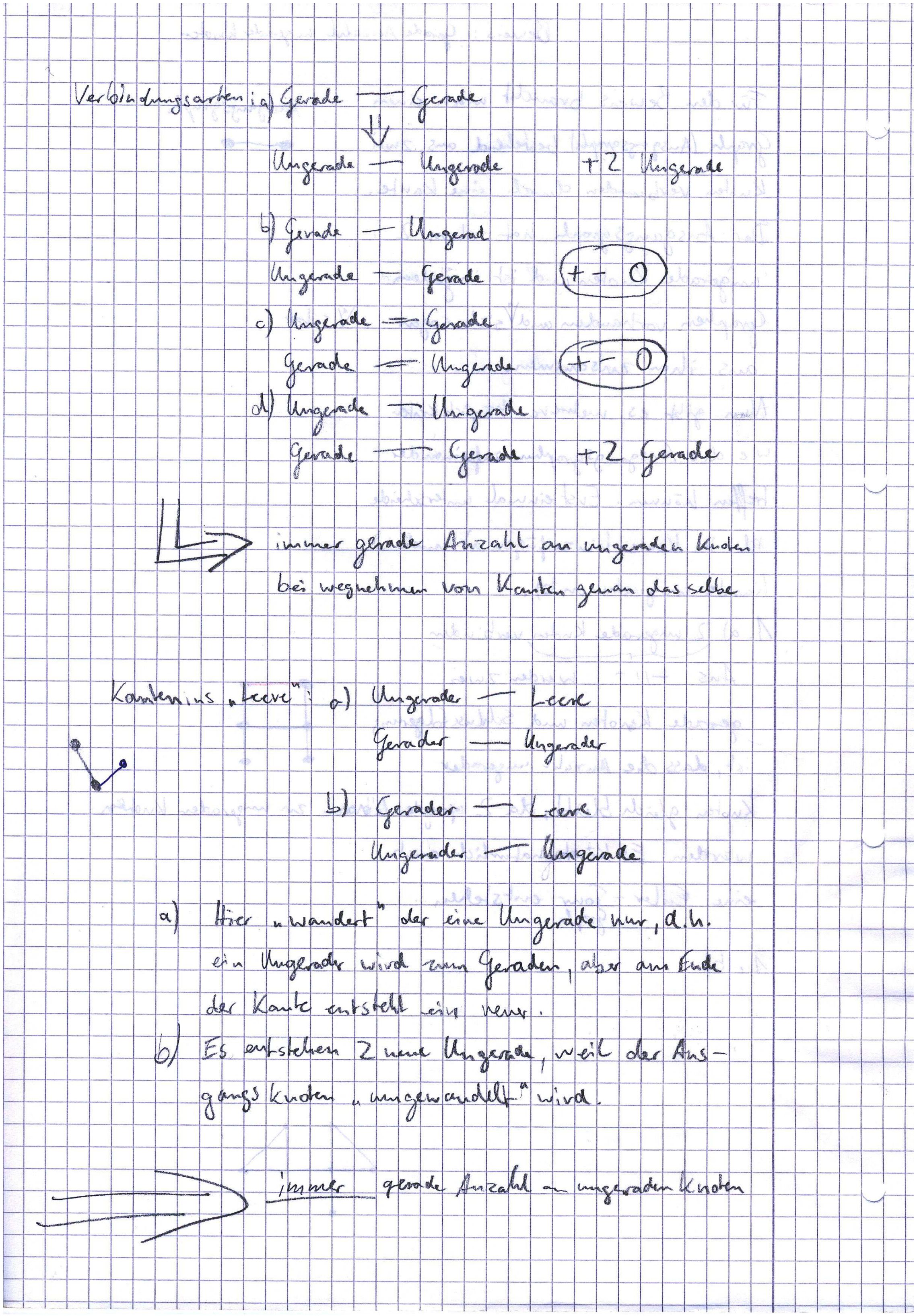


Abbildung 36: Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist gerade: Argumentieren mittels Fallunterscheidung (LK 13).



Verbindungsarten: a) Gerade — Gerade

⇓

Ungerade — Ungerade   +2 Ungerade

b) Gerade — Ungerad

Ungerade — Gerade   +− 0

c) Ungerade — Gerade

Gerade — Ungerade   +− 0

d) Ungerade — Ungerade

Gerade — Gerade   +2 Gerade

⇒ immer gerade Anzahl an ungeraden Knoten

bei wegnehmen von Kanten genau das selbe

Kanten ins „Leere": a) Ungerader — Leere

Gerader — Ungerader

b) Gerader — Leere

Ungerader — Ungerade

a) Hier „wandert" der eine Ungerade nur, d.h. ein Ungerader wird zum Geraden, aber am Ende der Kante entsteht ein neuer.

b) Es entstehen 2 neue Ungerade, weil der Ausgangsknoten „umgewandelt" wird.

⇒ immer gerade Anzahl an ungeraden Knoten

Abbildung 37: Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist gerade: Argumentationsskizzen (LK 13).

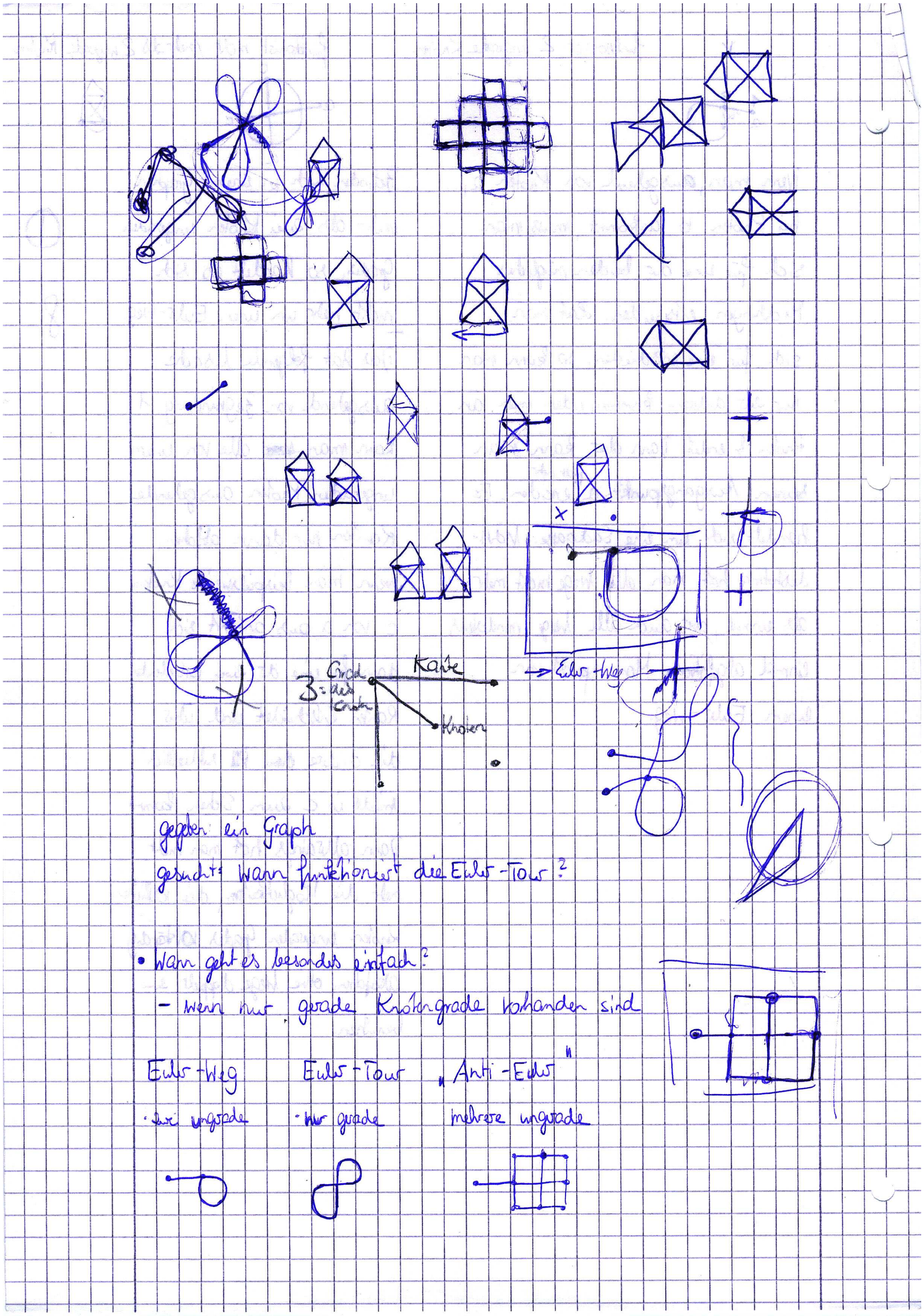


Abbildung 38: Auf der Suche nach Eulergraphen (LK 13).

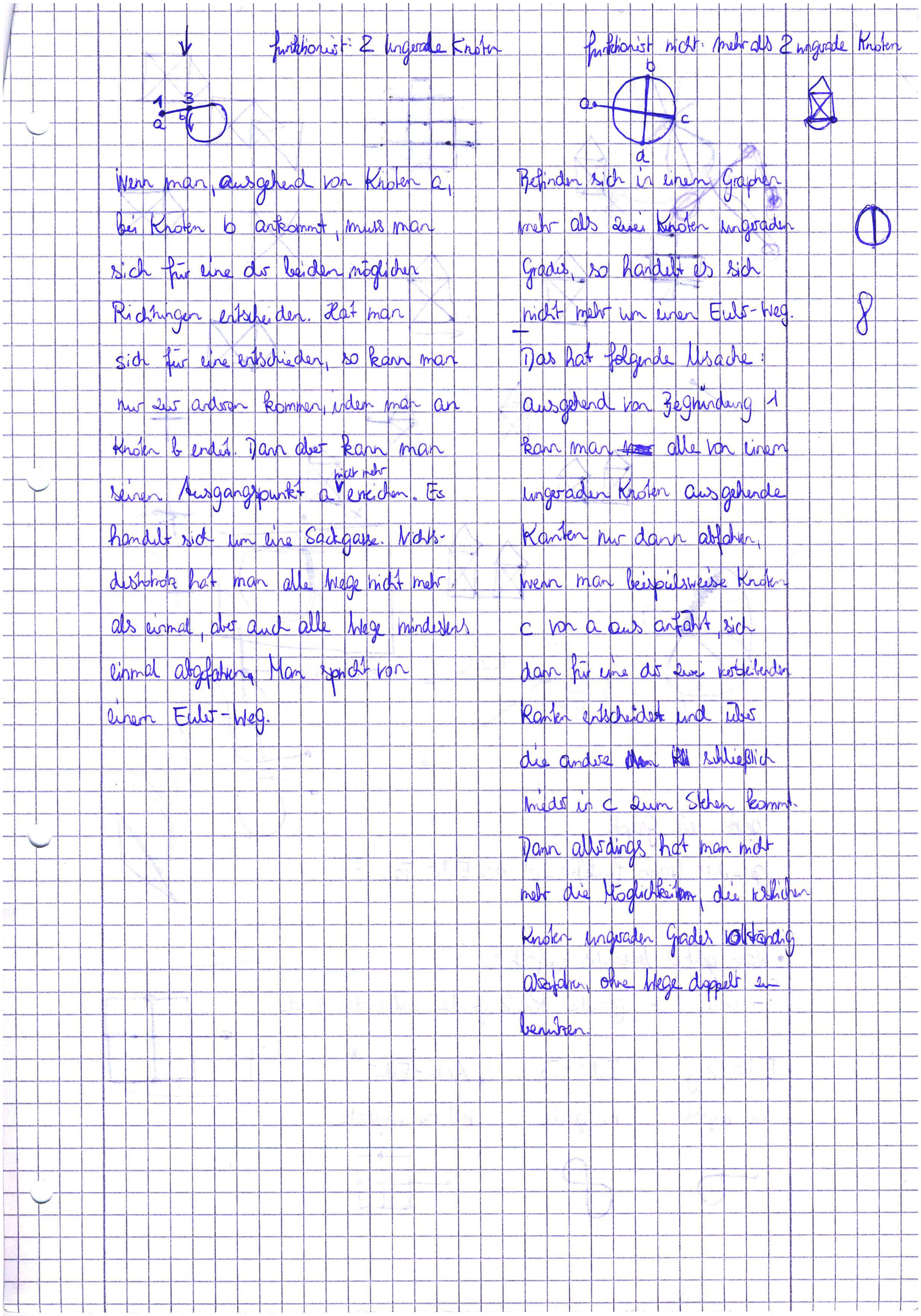


Abbildung 39: Argumentation: In welchen Graphen gibt es Eulerwege, in welchen nicht? (LK 13)

Es folgen nun noch einige Beispiele aus dem Modellierungsprozess der Schülerinnen und Schüler. Eine Schülergruppe hat anfangs direkt auf dem Stadtplan nach einem Weg gesucht (Abb. 40): „Wir haben zunächst willkürlich einen Weg gesucht und versucht, Gesetzmäßigkeiten festzustellen.“ Dabei haben sie festgestellt, dass Stellen wie der kleine eingekreiste Platz Schwierigkeiten machen (hier entstehen Knoten vom Grad drei). Zudem haben sie an den Kartenrändern Entscheidungen getroffen, ob dort zusätzliche Kanten eingetragen werden. Eine Liste von sehr differenzierten Fragen derselben Gruppe, die sich während des Modellierungsprozesses stellten, sind in Abb. 41 zu sehen. Eine entsprechende Fragenliste einer anderen Schülergruppe ist in Abb. 42 abgedruckt. Dort wird bereits das Problem der Einbahnstraßen und von Ein- und Ausgraden angesprochen. Abb. 43 zeigt Überlegungen zum Umgang mit den verschiedenen Straßenseiten und mit Kreuzungen vom Grad 3.

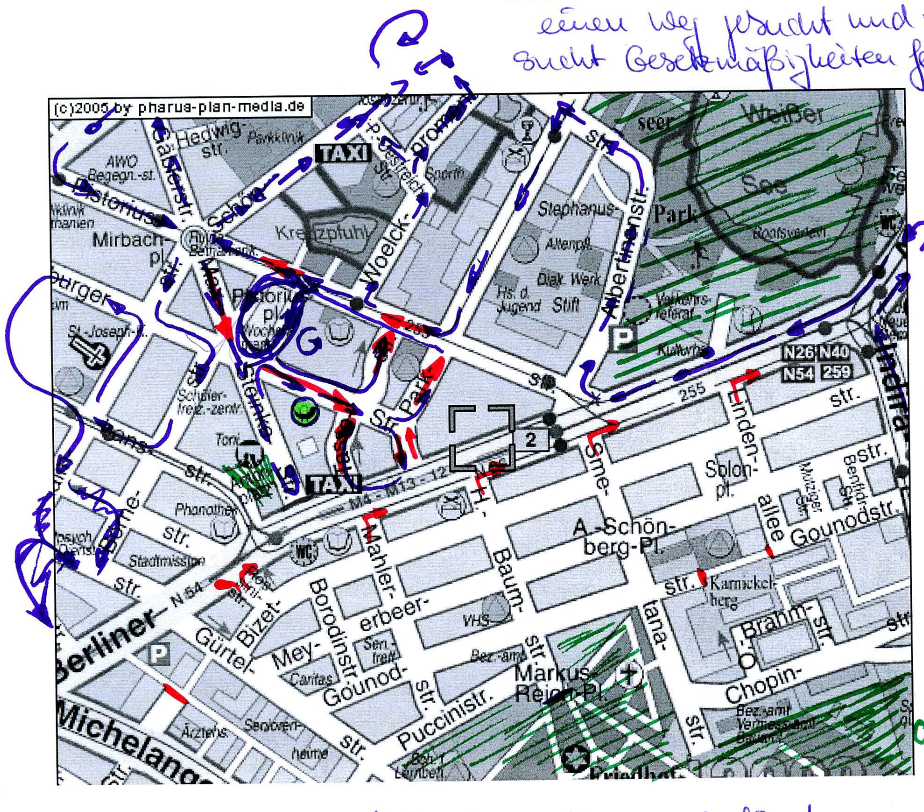
Brigitte Lutz-Westphal, ZIB (Volkswagenstiftung)/TU Berlin (DFG-Forschungszentrum MATHEON)
Leistungskurs 13, Wieland-Herzfelde-Oberschule Berlin-Weißensee, April/Mai 2005

Müllabfuhr

Die Briefzustellung optimieren

In diesem Gebiet soll die Post ausgetragen werden. Optimieren Sie den Weg des Postboten oder der Postbotin.

Wir haben zunächst willkürlich einen Weg gesucht und versucht Gesetzmäßigkeiten festzustellen.



- man muss entscheiden, wo man anfängt
- man muss entscheiden, ob man über den Ausschnitt hinausgeht oder die Straße zurück

Abbildung 40: Ein erster Versuch für einen Weg des Müllautos (LK 13).

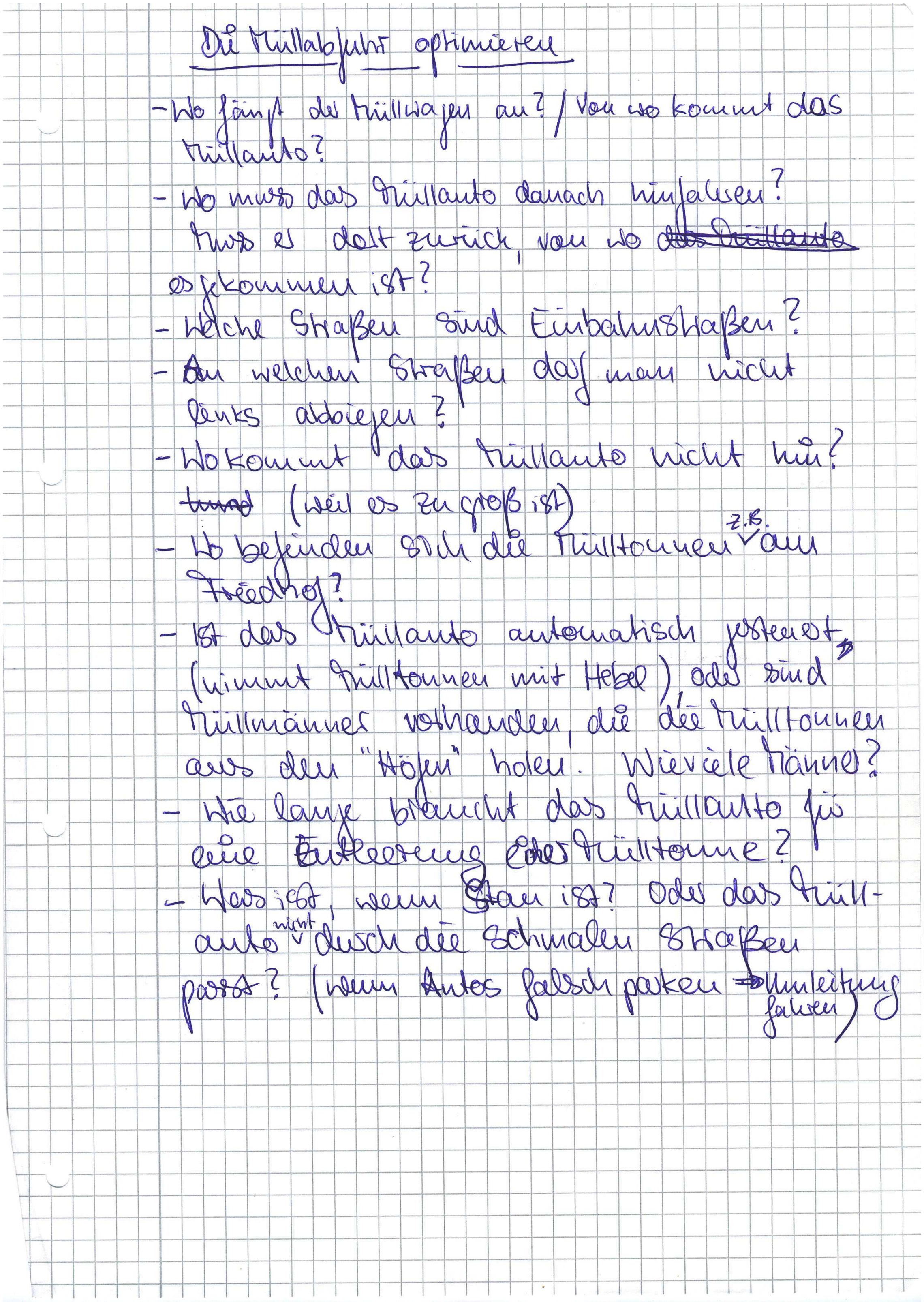


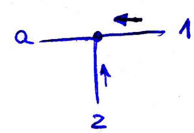
Abbildung 41: Modellierungsfragen I (LK 13).

- manche Straßen nicht mit Müllauto zu erreichen
- wo anfangen?
- nichts doppelt befahren → kürzester Weg
  → dafür aber viele Kurven (zeitaufwändig) weil langsam [eng, wenig Platz)
  - Frage: ist längerer Weg evtl. doch der schnellste (Zeitoptimierung)
  → sehr schwer zu ermitteln
- Uneinigkeit über Befahrbarkeit einiger Straßen

} Theorie + Praxis - Diskrepanz

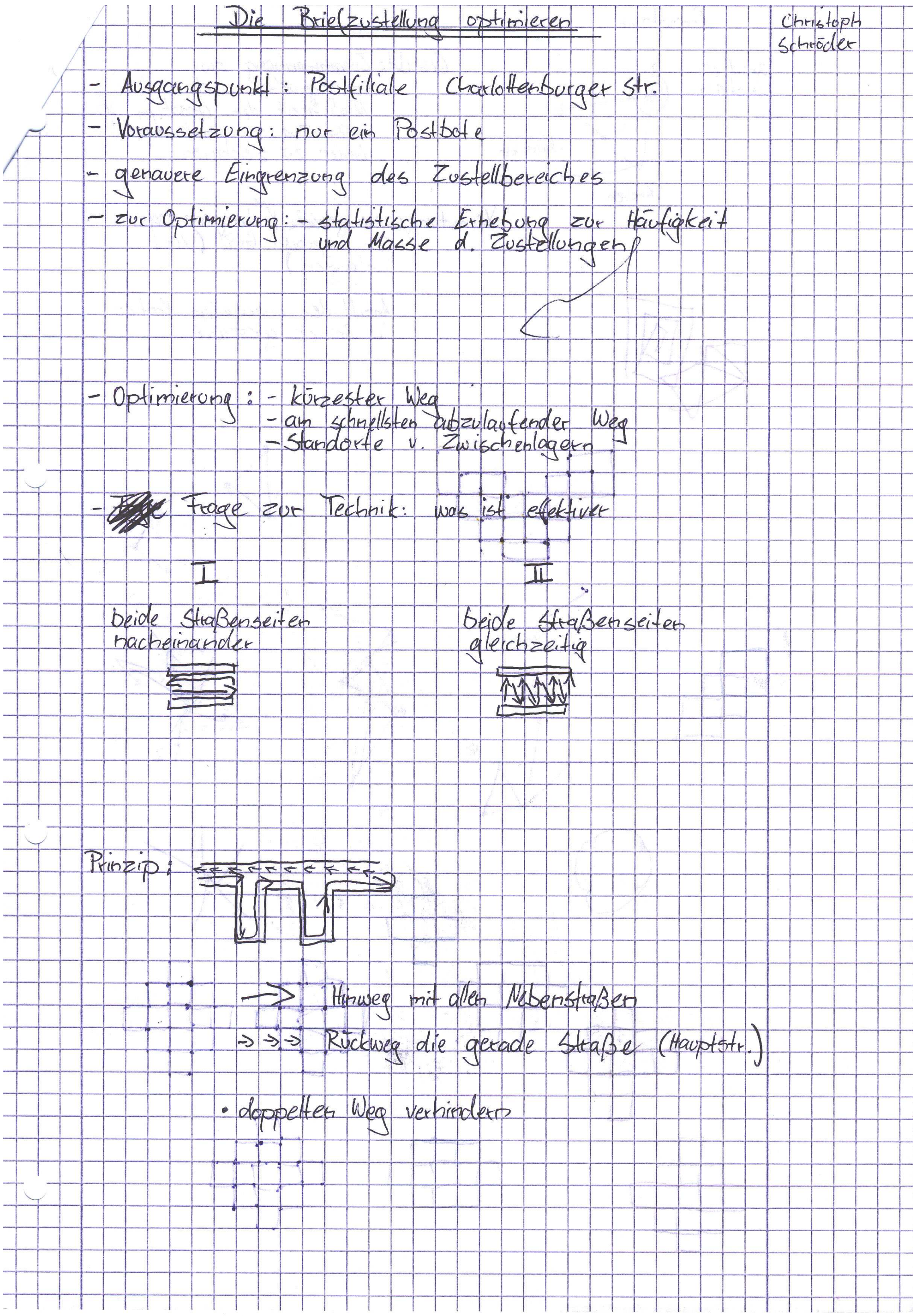
- welcher Zustand gilt: aktueller oder der nach Fertigstellung der Baustelle?
- Gebiet schon relativ groß → unübersichtlich
- wegen Straßenbahn oder Abbiegeverbot manche Straßen schwer überquerbar

- ungelöst: Einbahnstraßenproblematik: Ein- und Ausgrad



- nur ein Ausweg mgl.
- in der Praxis zweiten Grades, aber doch auch dritten Grades

Abbildung 42: Modellierungsfragen II (LK 13).



Die Briefzustellung optimieren

Christoph Schröder

- Ausgangspunkt: Postfiliale Charlottenburger Str.
- Voraussetzung: nur ein Postbote
- genauere Eingrenzung des Zustellbereiches
- zur Optimierung: - statistische Erhebung zur Häufigkeit und Masse d. Zustellungen
- Optimierung: - kürzester Weg
  - am schnellsten abzulaufender Weg
  - Standorte v. Zwischenlagern
- Frage zur Technik: was ist effektiver

I beide Straßenseiten nacheinander

II beide Straßenseiten gleichzeitig

Prinzip:

Hinweg mit allen Nebenstraßen

Rückweg die gerade Straße (Hauptstr.)

• doppelten Weg verhindern

Abbildung 43: Vor der Modellierung bereits erste Gedanken zur „Technik" des Ablaufens der Straßen (LK 13).

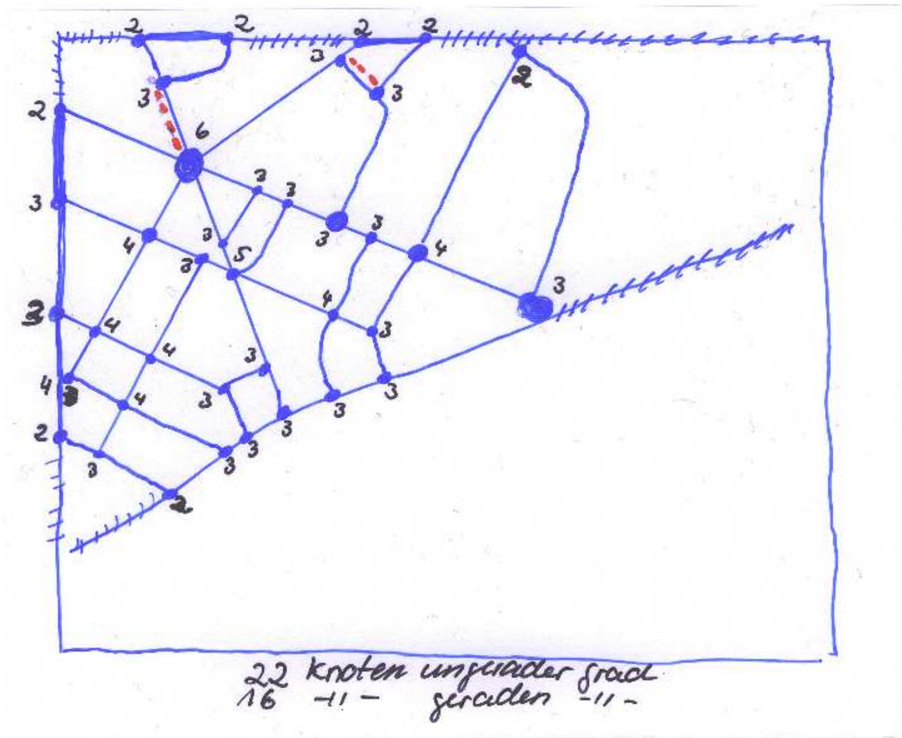


Abbildung 44: Graphenmodell für einen Teil des Stadtplanausschnittes. Es wurden beherzt Entscheidungen getroffen, wie mit den Kartenrändern umgegangen wird. In Rot wurde bereits begonnen, Knoten ungeraden Grades miteinander zu verbinden (Leerfahrten) (LK 13).

Die Abbildungen 44, 45, 46 und 47 zeigen verschiedene weitere auf Folie gezeichnete Modelle für denselben Stadtplanausschnitt. Es ist deutlich zu sehen, wie einige der Schülerinnen und Schüler versucht haben, das Problem konkret zu lösen, indem sie direkt Euler-Touren konstruiert haben. Für die Aufgabenstellung, die Tour des Müllautos zu optimieren, geht das nur, wenn einige Straßen ausgelassen werden oder nur ein Teil des Stadtplanausschnitts bearbeitet wird. Im Falle der Postbotentour kann anders modelliert werden: Indem alle Straßen verdoppelt werden (Begehen beider Straßenseiten), entsteht ein Eulergraph und es kann mit einigem Fleiß eine Eulertour gefunden werden (siehe Abb. 47).

Sobald versucht wurde, vom konkreten Finden einer Tour zu allgemeineren Lösungsansätzen überzugehen, wurde der auf dem Stadtplanausschnitt gezeichnete Graph zu groß und unübersichtlich. Daher wurden dann oft nur noch Teile des Ausschnittes als Graphen modelliert, wie z. B. in Abb. 44 oder in Abb. 45 unten. Auf diese Graphen kamen die Schülerinnen und Schüler meist erst nach einigen Schulstunden zurück. In der Zwischenzeit arbeiteten sie im „Graphenlabor“, um Eulergraphen zu charakterisieren und sie entwickelten Algorithmen zur Konstruktion von Eulertouren.

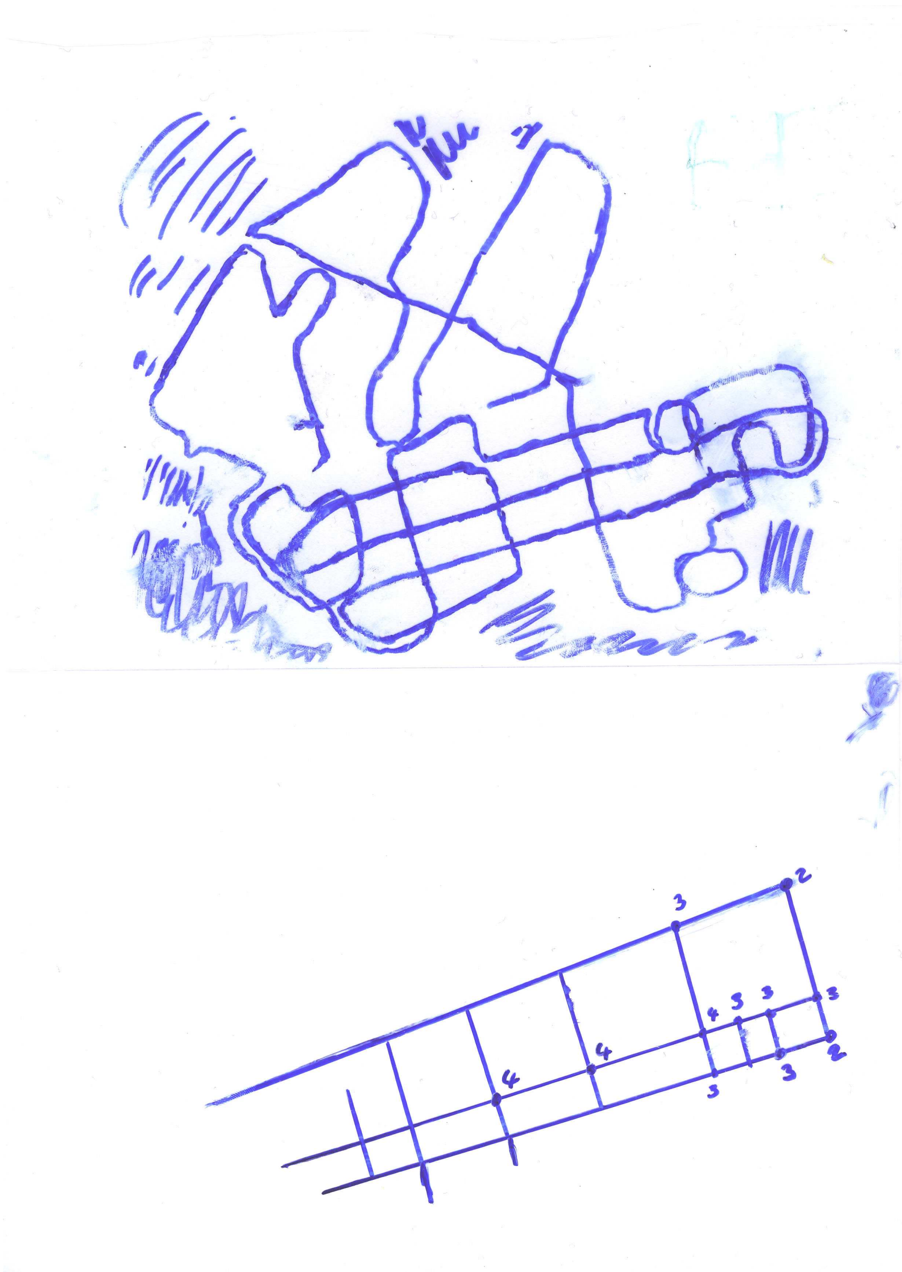


Abbildung 45: Zwei weitere Annäherungen an Modelle für denselben Stadtplanausschnitt. Oben ein Eulerweg, unten der Graph für einen Teil des Stadtplanausschnittes (LK 13).

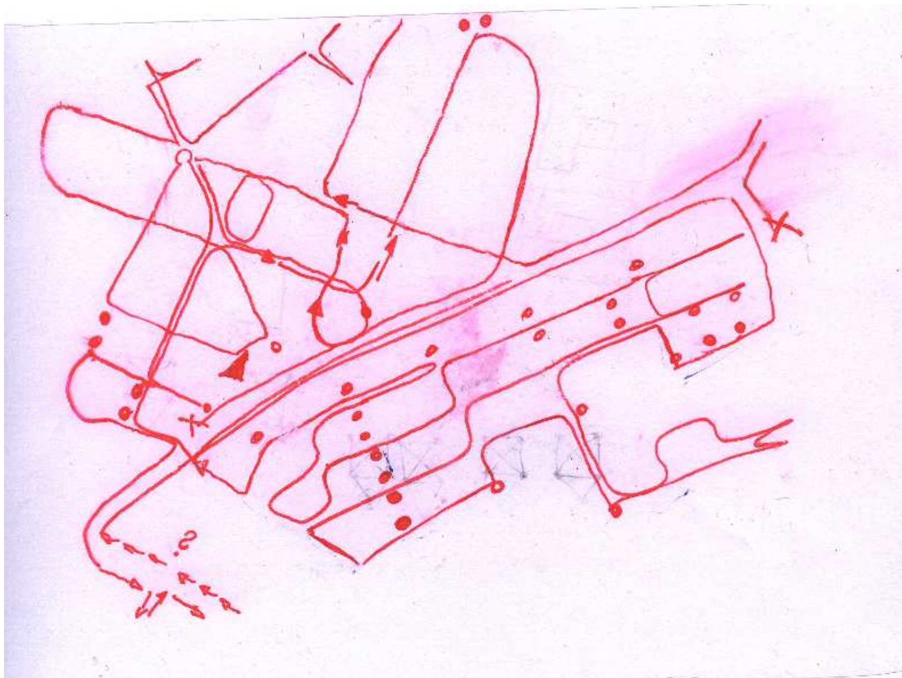


Abbildung 46: Hier wurde bereits eine Eulertour konstruiert, allerdings nicht durch alle Straßen. Die Punkte markieren Stellen, an denen Knoten mit Grad 3 entstehen würden (LK 13).

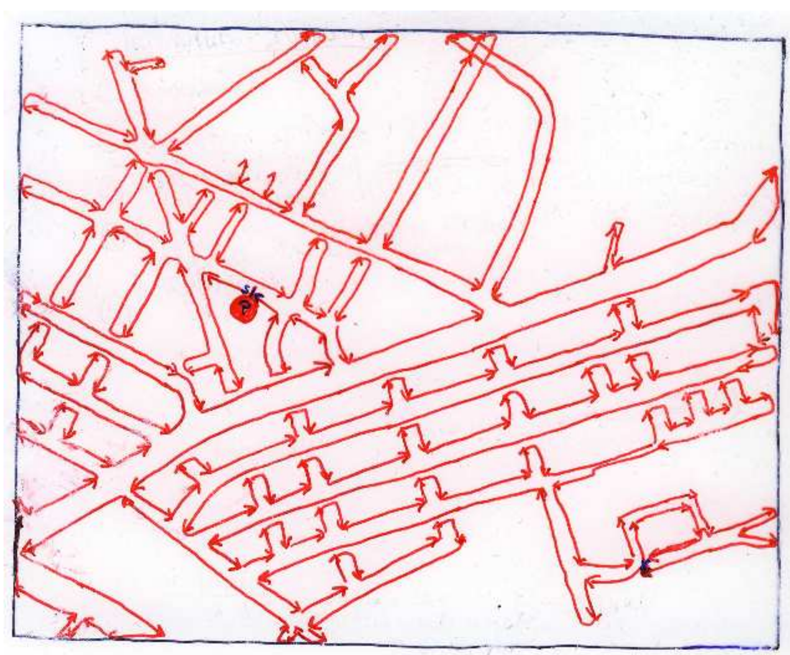


Abbildung 47: Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen, die sich alle auf die Müllautoproblematik beziehen, wurde hier eine Postbotentour modelliert. Durch die Verdopplung sämtlicher Straßen entsteht ein Eulergraph und es lässt sich direkt eine optimale Lösung konstruieren (LK 13).

8 „Kombinatorische Optimierung erleben“ – ein Lehrbuch für Lehrerinnen und Lehrer

8.1 Zum Konzept der Buchkapitel

Das Buchkonzept wurde gemeinsam mit Prof. Dr. Stephan Hußmann entwickelt.

Das Buch „Kombinatorische Optimierung erleben“ [38] ist in erster Linie als Lehrbuch für Lehrerinnen und Lehrer gedacht. Es gibt eine Einführung in die wichtigsten unterrichtsrelevanten Themen der kombinatorischen Optimierung. Das Buch ist als Lehr-, Lern- und Arbeitsbuch gestaltet, das anders aufgebaut ist, als die meisten mathematischen Lehrbücher.

Jedes Kapitel beginnt mit einigen kurz gefassten Problemstellungen. Stets werden mehrere Problemsituationen vorgestellt, die teilweise verschiedene Aspekte des Kapitelthemas beinhalten oder aber verschiedene Blickwinkel bieten. Die große Stärke der Themen, dass sie sich aus einfachen (motivierenden) Alltagssituationen und -fragen heraus entwickeln lassen, wurde hier genutzt. Es werden jeweils konkrete Arbeitsaufträge formuliert und anhand dieser Arbeitsaufträge werden die Themen Schritt für Schritt erarbeitet. Es wird keine „fertige Mathematik“ mit anschließenden Übungsaufgaben präsentiert, sondern ein möglicher Erarbeitungsgang beschrieben. Dabei stehen Resultate wie Definitionen oder Sätze häufig erst am Ende einzelner Abschnitte der Erarbeitung. Somit wird ein genetisch aufgebauter Lehrtext geschaffen, der den Prozesscharakter von Mathematik in den Vordergrund stellt.

Die Grundidee hinter dem Buchkonzept ist, dass der Erarbeitungsgang der Leserinnen und Leser der Erarbeitung durch Schülerinnen und Schüler ähnelt. Wer das Buch oder einzelne Kapitel durcharbeitet, sollte dabei gleichzeitig eine Vorstellung von der Gestaltung eines Unterrichts über das Thema entwickeln können, der auf selbständiger Erarbeitung basiert.

Im Lauf der Kapitel werden immer wieder kleinere Arbeitsaufträge gegeben, um die jeweilige Problematik zu verdeutlichen und erneut zu eigenen Lösungsversuchen anzuregen. Dadurch werden die umfassenden Arbeitsaufträge vom Beginn des Kapitels in kleinschrittigere Aufgaben aufgegliedert. Dies ist nicht nur eine Hilfe für die Leserinnen und Leser, sondern auch für den Unterricht. Abhängig von den jeweiligen Rahmenbedingungen kann die Lehrperson mit Hilfe dieser unterschiedlich weit tragenden Aufgabenstellungen im Unterricht eher offenere oder kleinschrittigere Impulse für die Arbeit der Schülerinnen und Schüler geben. Die Aufgabenstellungen können aber auch eine Vorbereitung der Lehrperson auf typische Schüler-(Forschungs-)Fragen sein.

Sämtliche Arbeitsaufträge sind durch kleine rote Quadrate gekennzeichnet, damit sie (auch im Rahmen der Unterrichtsvorbereitung) schnell und einfach wiedergefunden werden können. Sie bilden einen „roten Faden“ durch die Erarbeitung eines Themas. Konkrete unterrichtsmethodische Kommentare ziehen sich ebenfalls durch die Kapitel, aber eher im Hintergrund und ohne „Rezepte“ anzugeben, was bei der von uns intendierten Art von Unterricht gar nicht möglich wäre.

In den roten Faden flechten sich (ebenfalls rot markiert) die aus den Fragen und Aufgaben resultierenden Erkenntnisse ein. Trotz der Betonung des Prozesscharakters des Inhaltes soll das Buch auch als Nachschlagemöglichkeit dienen. Die farblichen Hervorhebungen dienen der schnellen Auffindbarkeit des roten (Unterrichts-)Fadens und der „handfesten“ Resultate.

Es wurde darauf geachtet, möglichst keine der Fragen offen zu lassen, anders als in klassischen Mathematik-Lehrbüchern, in denen häufig Sätze wie diese zu finden sind: „XXX ist soundso, wie man leicht sieht.“ oder „YYY sei dem Leser zur Übung überlassen.“ oder gar „Das ist trivial!“. Durch das Vermeiden solcher offenbleibenden Fragen sollen Frustrationen vermieden werden und den Lehrerinnen und Lehrern Sicherheit im Umgang mit einem neuen Stoff gegeben werden. Der normale Lehreralltag lässt häufig keine Zeit, sich solchen Aufgaben intensiv zu widmen. Dadurch dass sämtliche Fragen beantwortet werden, kann das Buch auch ohne die Bearbeitung der Arbeitsaufträge gelesen werden und so in relativ kurzer Zeit ein Überblick über die Thematik gewonnen werden.

Auch wer die Themen bereits kennt, kann durch die problem- und prozessorientierte Darstellung Anregungen für die unterrichtliche Umsetzung der Themen bekommen. Und für diejenigen, die sich einfach nur so, ohne später Unterricht daraus zu machen, mit kombinatorischer Optimierung beschäftigen wollen, kann die Darstellung, die den Weg, der zu den Resultaten führt, aufzeigt, und somit von der weit verbreiteten Form von Definition-Satz-Beweis oder Problem-Definition-Satz-Beweis abweicht, neue Blickwinkel öffnen und Mathematik neu erleben lassen.

8.2 Optimal zum Ziel: Das Kürzeste-Wege-Problem

Das folgende Kapitel ist ein Vorabdruck des ersten Kapitels aus dem Buch „Kombinatorische Optimierung erleben“ [38], das 2006 im Vieweg-Verlag erscheint.

8.3 Günstig verbunden: Minimale aufspannende Bäume

Das folgende Kapitel ist ein Vorabdruck des zweiten Kapitels
aus dem Buch „Kombinatorische Optimierung erleben“ [38],
das 2006 im Vieweg-Verlag erscheint.

8.4 Mathematik für die Müllabfuhr: Das chinesische Postbotenproblem

Das folgende Kapitel ist ein Vorabdruck des dritten Kapitels aus dem Buch „Kombinatorische Optimierung erleben“ [38], das 2006 im Vieweg-Verlag erscheint.

Literatur

[1] Arithmeum. Old Problems in Discrete Mathematics and its Modern Applications - Klassische Probleme in der Diskreten Mathematik und deren modernen Anwendungen. CD-ROM, 2002.

[2] Hans Aebli. *Zwölf Grundformen des Lehrens.* Klett-Cotta, Stuttgart, 12. Auflage, 2003.

[3] Martin Aigner. *Diskrete Mathematik.* Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 3. Auflage, 1999.

[4] Martin Aigner, Christian Bänsch, Martin Grötschel, Brigitte Lutz-Westphal, Andreas Unterreiter und Günter M. Ziegler. Lebendige Mathematik! Berliner Thesen zum Mathematikunterricht. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **4**, 29–31 (2003).

[5] Ian Anderson. *A first course in Combinatorial Mathematics.* Oxford University Press, New York, 2. Auflage, 1989.

[6] Peter Baptist. Optimale Wege in endlichen gerichteten Graphen. *Praxis der Mathematik* **4**, No. 21, 99–105 (1979).

[7] Tim Bell, Ian H. Witten und Mike Fellows. *Computer Science unplugged. Off-Line Activities and Games for all Ages.* Victoria University of Wellington, 1999.

[8] Hans-Günther Bigalke. Graphentheorie im Mathematikunterricht? *Der Mathematikunterricht „Graphentheorie II“* **20**, No. 4, 5–10 (1974).

[9] Hans-Günther Bigalke. Über die mögliche Bedeutung der Graphentheorie beim Lernen von Mathematik. *Didaktik der Mathematik* **3**, No. 2, 189–216 (1974).

[10] Jany Cajetan Binz. Gerüste in vollständigen Graphen. *Praxis der Mathematik* **6**, No. 18, 149–154 (1976).

[11] Wolfgang Born und Gunter Otto, Hg. *Didaktische Trends.* Urban & Schwarzenberg, München/Wien/Baltimore, 1978.

[12] Klaus Bovermann, Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel. Der algorithmische Standpunkt in der elementaren Kombinatorik - Bemerkungen und Beispiele. *Der Mathematikunterricht „Kombinatorik“* **29**, No. 5, 65–92 (1983).

[13] René Brandenberg und Peter Gritzmann. Zu viele Bäume? *Mathematik lehren „Diskrete Mathematik“* , No. 129, 26–64 (April 2005).

[14] Regina Bruder und Hans-Georg Weigand (Hg.). Diskrete Mathematik. *Mathematik lehren* **129** (April 2005).

[15] Andreas Büchter und Timo Leuders. *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen.* Cornelsen Scriptor, Berlin, 2005.

[16] Rainer Dankwerts, Walter Deuber und Dankwart Vogel. Anmerkungen zur Kombinatorik in Wissenschaft und Unterricht. *Der Mathematikunterricht „Kombinatorik“* **29**, No. 5, 7–15 (1983).

[17] Philip J. Davis und Reuben Hersh. *Erfahrung Mathematik*. Birkhäuser, Basel, 1994.

[18] Valerie A. DeBellis und Joseph G. Rosenstein. Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **36**, No. 2, 46–55 (2004).

[19] Jürgen Floer. Optimierung von Netzwerken - Kürzeste Wege und größte Flüsse. *Praxis der Mathematik* **1**, No. 19, 1–6, 40–44 (1977).

[20] Freie und Hansestadt Hamburg, Behörde für Bildung und Sport, Amt für Bildung – B22 – (Hg.). Rahmenplan Mathematik. Bildungsplan achtstufiges Gymnasium, Sekundarstufe I. `http://lbs.hh.schule.de/bildungsplaene/Sek-I_Gy8/MATHE_Gy8.pdf`.

[21] Freie und Hansestadt Hamburg, Behörde für Bildung und Sport, Amt für Bildung – B22 – (Hg.). Rahmenplan Mathematik. Bildungsplan gymnasiale Oberstufe. `http://lbs.hh.schule.de/bildungsplaene/GyO/MATHE_GyO.pdf`, 2004.

[22] Hans Freudenthal. *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1*. Klett, Stuttgart, 1. Auflage, 1973.

[23] Peter Gallin und Urs Ruf. *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen: Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik*. Kallmeyer, Seelze-Velber, 1998.

[24] Anne Geschke, Ulrich Kortenkamp, Brigitte Lutz-Westphal und Dirk Materlik. Visage - Visualization of Algorithms in Discrete Mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **37**, No. 5, 395–401 (2005).

[25] Gerald A. Goldin. Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **36**, No. 2, 56–60 (2004).

[26] Nigel Green. Unterrichtsvorschläge zur diskreten Mathematik. *Mathematik lehren „Anregungen aus England“* , No. 84, 60–64 (1997).

[27] Peter Gritzmann und René Brandenberg. *Das Geheimnis des kürzesten Weges. Ein mathematisches Abenteuer*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 2002.

[28] Martin Grötschel. *Graphen- und Netzwerkalgorithmen (Algorithmische Diskrete Mathematik I). Skriptum zur Vorlesung im SS 2003.* TU Berlin, 2003. am 20.1.2006 geladen von `http://www.zib.de/groetschel/teaching/skriptADM-I.pdf`.

[29] Martin Grötschel. Das Problem mit der Komplexität – P=NP? *Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht* (Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal, Hg.). Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, erscheint 2006.

[30] Martin Grötschel. Schnelle Rundreisen – das Travelling-Salesman-Problem. *Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht* (Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal, Hg.). Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, erscheint 2006.

[31] Britta Habdank-Eichelsbacher und Hans Niels Jahnke. Authentische Erfahrungen mit Mathematik durch historische Quellen. am 28.3.2006 geladen von: `http://www.uni-essen.de/didmath/texte/jahnke/hnj_pdf/tunnel.pdf`.

[32] Eric W. Hart. Discrete Mathematics: An exciting and Necessary Addition to the Secondary School Curriculum. *Discrete Mathematics across the Curriculum*. Yearbook, 67–77. The National Council of Teachers of Mathematics, Reston, 1991.

[33] Eric W. Hart. Algorithmic Problem Solving in Discrete Mathematics. *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*. Yearbook, 251–267. The National Council of Teachers of Mathematics, Reston, 1998.

[34] Lisa Hefendehl-Hebeker und Stephan Hußmann. Beweisen-Argumentieren. *Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (Timo Leuders, Hg.), 93–106. Cornelsen, Berlin, 2003.

[35] Robert L. Holliday. Graph Theory in the Highschool Curriculum. *Discrete Mathematics across the Curriculum*. Yearbook, 87–95. The National Council of Teachers of Mathematics, Reston, 1991.

[36] Stephan Hußmann. *Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen. Mathematik unterrichten in einer offenen Lernumgebung*. Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2002.

[37] Stephan Hußmann und Timo Leuders. Mathematik treiben, authentisch und diskret – eine Perspektive für die Lehrerausbildung. *erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006*. Franzbecker, Hildesheim, 2006.

[38] Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal. *Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht*. Mathematik erleben. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2006.

[39] Eva Jablonka. *Meta-Analyse von Zugängen zur mathematischen Modellbildung und Konsequenzen für den Unterricht*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 1996.

[40] Thomas Jahnke. Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. am 29.3.2006 geladen von `http://www.math.uni-potsdam.de/prof/o_didaktik/a_mita/aa/Publ/vortr`.

[41] Joachim Jäger und Hans Schupp. Das Problem des Handlungsreisenden. *Mathematik lehren „Optimieren“* , No. 81, 21–51 (April 1997).

[42] Margaret J. Kenny und Christian R. Hirsch, Hg. *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12*. Yearbook. The National Council of Teachers of Mathematics, Virginia, USA, 1991.

[43] Karl Kießwetter und Rolf Rosenkranz. Das Problem der verschneiten Straßen - minimale Gerüste. *Der Mathematikunterricht „Extremwertprobleme IV“* **28**, No. 5, 5–26 (1982).

[44] Wolfgang Klafki. *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik*. Beltz, Weinheim/Basel, 4. Auflage, 1994.

[45] Hilde Kletzl. *Daten- und Beziehungsstrukturen. Eine didaktische Analyse im Spannungsfeld von angewandter Informatik und angewandter Mathematik*. PhD thesis, Universität Salzburg, 2002.

[46] Karl-Dieter Klose. Netze und Landkarten. *Der Mathematikunterricht „Graphentheorie III“* **24**, No. 3, 53–99 (1978).

[47] Ulrich Kortenkamp und Dirk Materlik. Visage - Unterrichtssoftware. `http://www.cinderella.de/visage`.

[48] Helge Lenné. *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1969.

[49] Lásló Lovász, József Pelikán und Katalin L. Vesztergombi. *Diskrete Mathematik*. Springer, Berlin, 2005.

[50] Brigitte Lutz-Westphal. Erlebnis Mathematik - Kombinatorische Optimierung im Unterricht. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **12**, No. 2, 78–81 (2004).

[51] Brigitte Lutz-Westphal. Lebendiger Mathematikunterricht mit kombinatorischer Optimierung. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2004*, 353–356. Franzbecker, Hildesheim, 2004.

[52] Brigitte Lutz-Westphal. Mit angewandter diskreter Mathematik neue (Denk-) Wege gehen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005*, 360–363. Franzbecker, Hildesheim, 2005.

[53] Brigitte Lutz-Westphal. Wie komme ich optimal zum Ziel? Kürzeste-Wege-Algorithmen für Graphen. *Mathematik lehren „Diskrete Mathematik“* , No. 129, 56–61 (April 2005).

[54] Brigitte Lutz-Westphal. Typisch diskret - Was macht diskretes Arbeiten aus? *erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006*. Franzbecker, Hildesheim, 2006.

[55] Brigitte Lutz-Westphal. Günstig verbunden – minimale aufspannende Bäume. *Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht* (Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal, Hg.). Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, erscheint 2006.

[56] Brigitte Lutz-Westphal. Mathematik für die Müllabfuhr – das chinesische Postbotenproblem. *Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht* (Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal, Hg.). Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, erscheint 2006.

[57] Brigitte Lutz-Westphal. Optimal zum Ziel – das Kürzeste-Wege-Problem. *Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht* (Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal, Hg.). Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, erscheint 2006.

[58] Joe Malkevitch. Trees: A mathematical tool for all seasons. am 20.2.2006 geladen von: `http://www.ams.org/featurecolumn/archive/trees.html`, Januar 2006.

[59] Günther Malle. Minimale Netze. *Mathematik lehren „Folgen“* , No. 96, 19–22 (Oktober 1999).

[60] Jiří Matoušek und Jaroslav Nešetřil. *Diskrete Mathematik. Eine Entdeckungsreise*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.

[61] Willi Maurer. Über Turniere. *Didaktik der Mathematik* **1**, No. 3, 49–67 (1975).

[62] Manfred Nitzsche. *Graphen für Einsteiger*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2. Auflage, 2005.

[63] Rolf Nußbaum und Roland Stowasser. Färbungsprobleme. *Der Mathematikunterricht „Elementare Topologie und Unterricht“* , No. 16-1, 35–52 (1970).

[64] Oystein Ore. *Graphen und ihre Anwendungen*. Klett, 1974.

[65] George Polya. *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Francke Verlag, Tübingen/Basel, 4. Auflage, 1995.

[66] Hans-Christian Reichel. Hat die Stoffdidaktik eine Zukunft? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **27**, No. 6, 178–187 (1995).

[67] Joseph G. Rosenstein, Deborah S. Franzblau und Fred S. Roberts, Hg. *Discrete Mathematics in the schools*. Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science **36**. American Mathematical Society, 1997.

[68] Emanuel Röhrl und Hans-Günther (Hg.) Bigalke. Graphentheorie II. *Der Mathematikunterricht* **4**, No. 20 (1974).

[69] Emanuel Röhrl und Karl-Dieter (Hg.) Klose. Graphentheorie III. *Der Mathematikunterricht* **3**, No. 24 (1978).

[70] Emanuel Röhrl und Georg (Hg.) Schmitz. Graphentheorie . *Der Mathematikunterricht* **2**, No. 19 (1973).

[71] Hans Schupp. Optimieren ist fundamental. *Mathematik lehren „Optimieren“* , No. 81, 4–10 (1997).

[72] Andreas Schuster. Bericht für die Bayerische Lehrplankommission, Dezember 2001.

[73] Andreas Schuster. About Traveling Salesmen and Telephone Networks – About Combinatorial Optimization Problems at High School. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **36**, No. 2 (2004).

[74] Andreas Schuster. *Kombinatorische Optimierung als Gegenstand der Gymnasialdidaktik im Umfeld von Mathematik- und Informatikunterricht.* Habilitationsschrift, Würzburg, 2004.

[75] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, Hg. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Wolters Kluwer Deutschland, München, 2004.

[76] Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin (Hg.). Rahmenlehrpläne für die Sekundarstufe I. Mathematik. Entwurfsfassung. `http://www.lisum.de/Inhalte/Data/Rahmenlehrplaene/SekI/Entwurfsfassungen/index.html/2005-09-30.3904796148/download`, 2005.

[77] Eckart Stampe. *Repetitorium Fachdidaktik Mathematik.* Klinkhardt, Bad Heilbrunn/Obb., 1984.

[78] Silke Thies. *Zur Bedeutung diskreter Arbeitsweisen im Mathematikunterricht.* PhD thesis, Universität Gießen, 2002.

[79] Peter Tittmann. *Einführung in die Kombinatorik.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/Berlin, 2000.

[80] Marja Van den Heuvel-Panhuizen. Realistic Mathematics Education. Work in progress. am 5.4.2006 geladen von `http://www.fi.uu.nl/en/rme/`, 1998.

[81] Marja Van den Heuvel-Panhuizen. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. am 5.4.2006 geladen von `http://www.fi.uu.nl/en/rme/TOURdef+ref.pdf`, 2000.

[82] Walter Vogel. Optimierung von Netzwerken. *Der Mathematikunterricht „Extermwertprobleme III“* **23**, No. 4, 5–18 (1977).

[83] Hans-Joachim Vollrath. *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2001.

[84] Martin Wagenschein. *Verstehen lehren. Genetisch - Sokratisch - Exemplarisch.* Beltz, Weinheim und Basel, 5. Auflage, 1975.

[85] Ingo Weidig. Das Studium von Netzen. Eine Brücke zwischen der Topologie in der Grundschule und dem Oberstufen-Unterricht des Gymnasiums. *Der Mathematikunterricht „Topologie II“* **18**, No. 3, 42–55 (1972).

[86] Bernd Westermann. Anwendungen und Modellbildung. *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (Timo Leuders, Hg.). Cornelsen Scriptor, Berlin, 2003.

[87] Heinrich Winter. Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule. *Der Mathematikunterricht „Mathematik im Unterricht der Grundschule“* **17**, No. 5, 40–66 (1971).

[88] Heinrich Winter. *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* Vieweg, Braunschweig, 2. Auflage, 1991.

[89] Heinz Wippermann. *Graphen im Unterricht.* 1976.

[90] Wissenschaftlicher Rat der Dudenredaktion, Hg. *Duden Fremdwörterbuch.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 4. Auflage, 1982.

[91] Alexander Israel Wittenberg. *Bildung und Mathematik. Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach.* Klett, Stuttgart, 1963.

[92] Erich Ch. Wittmann. *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 6. Auflage, 1981.