Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin
Heilbronner Str. 10, D-10711 Berlin - Wilmersdorf

Wolfram Koepf

Algebraische Darstellung transzendenter Funktionen

Preprint SC 94–24 (Oktober 1994)

Algebraische Darstellung transzendenter Funktionen

Wolfram Koepf

Ich möchte in diesem Bericht algorithmische Methoden vorstellen, die im wesentlichen in diesem Jahrzehnt Einzug in die Computeralgebra gefunden haben. Die hauptsächlichen Ideen gehen auf Stanley [26] und Zeilberger [38]–[41] zurück, vgl. die Beschreibung [27], und haben ihre Wurzeln teilweise bereits im letzten Jahrhundert (siehe z. B. [3]–[4]), gerieten aber auf Grund der Komplexität der auftretenden Algorithmen wieder in Vergessenheit.
Eine der Kernfragen kann hierbei so formuliert zu werden: Worin liegt der wesentliche Unterschied zwischen der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und beispielsweise der Funktion $g(x) = e^x + |x|/10^{1000}$, der dazu führt, daß alle Mathematiker die Exponentialfunktion f als elementare Funktion auffassen und nicht g, obwohl sich diese beiden Funktionen auf einem großen Bereich der reellen Achse numerisch kaum unterscheiden?
Oder ein Beispiel aus der diskreten Mathematik: Warum erhält die Fakultätsfunktion $a_n = n!$ den Vorzug gegenüber $b_n = n! + n/10^{1000}$ oder irgendeiner anderen diskreten Funktion?
Obwohl die Beispiele die bekanntesten stetigen bzw. diskreten **transzendenten** (nicht-algebraischen) Funktionen betreffen, ist die Antwort auf diese Fragen rein **algebraischer Natur**: Die Exponentialfunktion f ist nämlich charakterisiert durch jede der folgenden algebraischen Eigenschaften:

1. f ist stetig, und für alle x, y gilt $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$;
2. f ist differenzierbar, und $f'(x) = f(x)$ sowie $f(0) = 1$;
3. $f \in C^\infty$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ mit $a_0 = 1$, und für alle $n \geq 0$ gilt $(n + 1)\, a_{n+1} = a_n$;

und die Fakultätsfunktion wird charakterisiert durch jede der folgenden algebraischen Eigenschaften:

4. $a_0 = 1$, und für alle $n \geq 0$ gilt $a_{n+1} = (n + 1)\, a_n$;
5. die erzeugende Funktion $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ erfüllt die Differentialgleichung $x^2 f'(x) + (x - 1) f(x) + 1 = 0$ mit der Anfangsbedingung $f(0) = 1$.

Während mir keine Methode bekannt ist, Funktionalgleichungen wie Eigenschaft (1.) in der Computeralgebra zur Darstellung transzendenter Funktionen einzusetzen, will ich aufzeigen, in welcher Form die anderen Eigenschaften dazu geeignet sind.
Man beachte, daß die erzeugende Funktion der Fakultät nur am Ursprung konvergiert, also als formale Reihe anzusehen ist. D. h. insbesondere, daß man eine geschlossene Darstellung der erzeugenden Funktion nicht angeben kann. (Diese ist zumindest nicht eindeutig: Jede Funktion der Funktionenschar $-\frac{e^{-1/x}}{x}(\mathrm{Ei}(-1/x) + c)$ (s. [1], Kapitel 5) stellt die erzeugende Funktion der Fakultät für $x > 0$ asymptotisch dar.) Darauf kommt es aber auch gar nicht an: Statt mit der erzeugenden Funktion selbst arbeitet man ohnehin viel besser mit ihrer Differentialgleichung, welche rein algebraisch ist! Genau dasselbe trifft auf die Exponentialfunktion und die Fakultät

selbst zu: Statt mit diesen transzendenten Objekten arbeite man mit den dazu äquivalenten algebraischen Differential- bzw. Rekursionsgleichungen (vgl. [8]).
Die gegebenen Eigenschaften sind **Strukturaussagen** für die betreffenden Funktionen. Bei der geringsten Änderung geht diese Struktur verloren. Beispielsweise kann die Funktion $g(x) = e^x + |x|/10^{1000}$ durch keine den Eigenschaften (1.)–(3.) analoge Vorschrift charakterisiert werden. Dagegen ist die Funktion $h(x) = e^x + x/10^{1000}$ beispielsweise durch die Differentialgleichung $(x-1)\,h''(x) - x\,h'(x) + h(x) = 0$ mit den Anfangsbedingungen $h(0) = 1$ und $h'(0) = 1 + 10^{-1000}$ gegeben.
Das Besondere (und Gemeinsame) an Exponential- bzw. Fakultätsfunktion besteht also darin, daß diese eine homogene lineare Differentialgleichung und jene eine homogene lineare Rekursionsgleichung erfüllt, wobei Differentialgleichung sowie Rekursionsgleichung Polynomkoeffizienten haben und beide erster Ordnung sind.
Verallgemeinern wir diesen Sachverhalt nun zunächst auf stetige Funktionen einer Variablen und nennen eine Funktion $f(x)$ **holonom**, falls sie eine homogene lineare Differentialgleichung mit Polynomkoeffizienten in x erfüllt. Stanley [26] zeigte, daß Summe und Produkt holonomer Funktionen sowie die Komposition mit algebraischen Funktionen wieder holonome Funktionen liefern. Beke [3]–[4] hat bereits vor 100 Jahren Algorithmen beschrieben, mit welchen die Differentialgleichung für Summe bzw. Produkt von f und g aus den Differentialgleichungen für f und g bestimmt werden können!
Analog nennt man eine diskrete Funktion a_n holonom, falls sie eine homogene lineare Rekursionsgleichung mit Polynomkoeffizienten in n erfüllt. Summe und Produkt holonomer diskreter Funktionen sind wieder holonom, und es gibt Algorithmen zur Berechnung der entsprechenden Rekursionen (s. [25], [20]).
Was haben wir hiermit nun gewonnen? Ignorieren wir einmal, daß $e^x, \sin x, \cos x, \arctan x$, $\arcsin x$ etc. transzendente Funktionen sind, und stellen wir lediglich ihre holonomen Differentialgleichungen $f' = f$, $f'' = -f$, $f'' = -f$, $(1+x^2)f''+2xf' = 0$, $(x^2-1)f''+xf' = 0$ etc. in Rechnung, so können wir nun aus diesen Differentialgleichungen mit reiner Polynomarithmetik (wir brauchen eigentlich nur lineare Algebra, vgl. [25], [20]) holonome Differentialgleichungen für Summen und Produkte solcher Funktionen, beispielsweise für $f(x) = \arcsin^2 x$ (nämlich $(x^2-1)f''' + 3xf'' + f' = 0$), erzeugen. Doch damit nicht genug: Für die Koeffizienten a_n der formalen Potenzreihe von $\arcsin^2 x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ folgt dann automatisch die holonome Rekursionsgleichung $n(1+n)(2+n)a_{n+2} = n^3 a_n$, welche (glücklicherweise) nur die zwei Terme a_{n+2} und a_n enthält, sich daher lösen läßt und zu der Darstellung

$$\arcsin^2 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n\, n!^2}{(1+n)\,(1+2n)!} x^{2n+2}$$

führt (vgl. [15], [32], [17]–[18]).
Oder notieren wir uns lediglich die holonomen Rekursionen rationaler Funktionen sowie die der Funktionen

$$(mn+b)!\,, \qquad \frac{1}{(mn+b)!} \qquad (m \in \mathbb{Z}) \qquad \text{sowie} \qquad a^n \tag{1}$$

(d. h. wir geben sie unserem favorisierten Computeralgebrasystem in geeigneter Form bekannt), so lassen sich nun für alle möglichen durch Addition und Multiplikation erzeugten

Funktionen holonome Rekursionen herleiten, beispielsweise die beiden Rekursionen

$$(n-k+1)^2 F(n+1,k) - (1+n)^2 F(n,k) = 0 \qquad (2)$$

und

$$(k+1)^2 F(n,k+1) - (n-k)^2 F(n,k) = 0 \qquad (3)$$

für $F(n,k) = \binom{n}{k}^2$. Diese können zwar auch leicht direkt aus der Darstellung von $F(n,k)$ abgelesen werden, aber das vorgestellte Verfahren kann problemlos auf die kompliziertere Funktion $F(n,k) = \frac{n!+k!^2}{k}$ angewandt werden und führt dann auf die Rekursionen

$$0 = nF(n+2,k) - (1+3n+n^2)F(n+1,k) + (1+n)^2 F(n,k)$$

und

$$0 = k(2+k)^2 F(n,k+2) - (1+k)(1+3k+k^2)(3+3k+k^2)F(n,k+1) + k(1+k)^3 F(n,k)\ .$$

Eine wichtige Fragestellung der Kombinatorik ist, zu einer gegebenen Funktion $F(n,k)$, ausgedrückt als Produkt von Termen der Form (1), die unendliche Summe

$$s(n) = \sum_k F(n,k)$$

zu berechnen, wobei über alle $k \in \mathbb{Z}$ zu summieren ist. (In der Praxis sind jedoch häufig nur endlich viele Terme von Null verschieden.) Ist nun $F(n,k)$ ein **hypergeometrischer Term**, d. h., sind sowohl $F(n+1,k)/F(n,k)$ als auch $F(n,k+1)/F(n,k)$ rational bzgl. beider Variablen n und k – dies trifft beispielsweise wegen (2)–(3) für $F(n,k) = \binom{n}{k}^2$ zu – so findet der (schnelle) **Zeilberger-Algorithmus** ([39], s. auch [21] und [23]) eine holonome Darstellung, d. h. eine holonome Rekursion, für $s(n)$. Dieser Algorithmus baut auf dem von Gosper [14] gefundenen Entscheidungsalgorithmus für die unbestimmte Summation auf. In unserem Beispielfall findet der Zeilberger-Algorithmus für $s(n) = \sum\limits_k \binom{n}{k}^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ die holonome Rekursion

$$(1+n)\, s(n+1) = 2(1+2n)\, s(n)\ ,$$

welche (glücklicherweise) wieder nur zwei Terme hat. Daher bekommen wir die Darstellung

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!^2}\ .$$

Im allgemeinen wird die resultierende Rekursion bzw. Differentialgleichung natürlich mehr als zwei Terme enthalten. Aber auch dann enthält diese zum einen eine interessante Strukturinformation (z. B. über die Orthogonalität eines Polynomsystems) und kann zudem eine für numerische Zwecke nützliche Vorschrift darstellen (vgl. [10]–[11]).
Die gefundene Strukturinformation kann insbesondere zur **Identifikation** transzendenter Funktionen herangezogen werden. Um z. B. die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{2k}{n}$$

(vgl. [28]) zu überprüfen – diese ist nicht trivial, da die beiden Summanden **nicht** dieselben Rekursionen bzgl. k und n erfüllen! – brauchen wir nur zu zeigen, daß beide Summen derselben Rekursion

$$(n+2)^2 s(n+2) - (16+21n+7n^2)s(n+1) - (n+1)^2 s(n) = 0$$

genügen – dies macht der Zeilberger-Algorithmus – sowie dieselben Anfangswerte $s(0) = 1$ und $s(1) = 2$ haben (dies ist trivial).
Als weiteres Beispiel betrachten wir die Funktion ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$)

$$\begin{aligned} V(\alpha,\beta,\gamma) &= (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-d/2)\Gamma(d/2-\gamma)\Gamma(\alpha+\gamma-d/2)\Gamma(\beta+\gamma-d/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(d/2)\Gamma(\alpha+\beta+2\gamma-d)(m^2)^{\alpha+\beta+\gamma-d}} \\ &\quad \cdot {}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c} \alpha+\beta+\gamma-d\,, \quad \alpha+\gamma-d/2 \\ \alpha+\beta+2\gamma-d \end{array}\right| z\right) \end{aligned}$$

(${}_2F_1$ stellt hierbei die Gaußsche hypergeometrische Reihe dar, s. z. B. [1], Kapitel 15), welche bei der Berechnung von Feynman-Diagrammen eine Rolle spielt [12], für die wir die Rekursion

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & (2\,\alpha-d+2\,\gamma)\;(2\,\alpha+2\,\beta-d+2\,\gamma)\;(2+2\,\alpha+2\,\beta-d+2\,\gamma)\;V(\alpha,\beta,\gamma) \\ & -2\alpha\,(2+2\alpha+2\beta-d+2\gamma)\,m^2 \\ & \qquad \cdot(-2\alpha-2\beta+2d-4\gamma+2z+4\alpha z+2\beta z-3dz+4\gamma z)\,V(1+\alpha,\beta,\gamma) \\ & +8\,\alpha\;(1+\alpha)\;(1+\alpha+\beta-d+\gamma)\;m^4\,(z-1)\;z\,V(2+\alpha,\beta,\gamma) \end{aligned}$$

sowie analoge Rekursionen bzgl. der Variablen β und γ erhalten. Diese können dann zur numerischen Berechnung herangezogen werden.
Zeilberger betrachtete in [38] die allgemeinere Situation von Funktionen F mehrerer diskreter und stetiger Variabler. Sind es d Variablen und hat man d (im wesentlichen unabhängige) möglicherweise gemischte homogene partielle Differential-Differenzengleichungen mit Polynomkoeffizienten (bzgl. aller Variablen) für F, nennen wir F ein holonomes System (vgl. [5]–[7]). Dann legen diese Gleichungen F zusammen mit geeigneten Anfangswerten bereits eindeutig fest.
Insbesondere gilt dies also, wenn das gegebene System holonomer Gleichungen separiert ist, d. h., wenn in jeder der Gleichungen nur Ableitungen bzgl. einer der stetigen Variablen bzw. nur Shifts bzgl. einer der diskreten Variablen vorkommen. Beispielsweise bilden die Legendre-Polynome $F(n,x) = P_n(x)$ ([1], Kapitel 22) auf Grund ihrer Differentialgleichung

$$(x^2-1)F''(n,x) + 2xF'(n,x) - n(1+n)F(n,x) = 0 \tag{4}$$

sowie ihrer Rekursionsgleichung

$$(n+2)F(n+2,x) - (3+2n)xF(n+1,x) + (n+1)F(n,x) = 0 \tag{5}$$

zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$F(0,0) = 1\,, \quad F(1,0) = 0\,, \quad F'(0,0) = 0\,, \quad F'(1,0) = 1$$

ein holonomes System. Gleichungen (4) und (5) stellen also eine hinreichende algebraische, ja sogar polynomiale, Struktur zur Beschreibung von $P_n(x)$ dar.
Faßt man die auftretenden (partiellen) Differentiationen und Indexverschiebungen als Operatoren und die Differenzen-Differentialgleichungen als Operatorengleichungen auf, so stellen diese ein **polynomiales Gleichungssystem** in einem nichtkommutativen Polynomring dar. Ist nämlich x eine stetige Variable und D_x der zugehörige Ableitungsoperator, so ist wegen der Produktregel $D_x(xf)-xD_xf = f$, und folglich hat man den Kommutator $D_xx-xD_x = 1$. Ist andererseits k eine diskrete Variable und K der zugehörige Indexverschiebungsoperator $Ka_k = a_{k+1}$ (Aufwärtsshift), so gilt $K(ka_k) - kKa_k = (k+1)a_{k+1} - ka_{k+1} = a_{k+1} = Ka_k$, und folglich gilt die Kommutatorregel $Kk - kK = K$. Entsprechendes gilt für die restlichen Variablen, während alle anderen Kommutatoren verschwinden.
Das Umformen eines durch gemischte Differenzen-Differentialgleichungen gegebenen holonomen Systems stellt sich in dem betrachteten nichtkommutativen Polynomring als ein polynomiales Eliminationsproblem dar, welches mit nichtkommutativen Gröbnerbasen-Methoden gelöst werden kann ([2], [13], [16], [38], [41], [29]–[31]). Als Beispiel diene $F(n,k) = \binom{n}{k}$. Hierfür gilt die Pascalsche Dreiecksbeziehung $F(n+1,k+1) = F(n,k) + F(n,k+1)$ sowie die reine Rekursion $(n+1-k)F(n+1,k) - (n+1)F(n,k) = 0$ bzgl. n, welche in Operatornotation $(KN - 1 - K)F(n,k) = 0$ sowie $((n+1-k)N - (n+1))F(n,k) = 0$ lauten, wobei $NF(n,k) = F(n+1,k)$ den Verschiebungsoperator bzgl. n bezeichne. Somit erhält man das Polynomsystem

$$KN - 1 - K = 0 \qquad \text{sowie} \qquad (n+1-k)N - (n+1) = 0\ .$$

Die Gröbnerbasis des erzeugten Linksideals bzgl. der Termordnung (k, n, K, N) (lexikographisch) ergibt sich mit [22] zu

$$\Big\{(k+1)K + k - n, (n+1-k)N - (n+1), KN - 1 - K\Big\}\ ,$$

d. h. also, daß auf diesem Wege **automatisch** die reine Rekursion

$$(k+1)\,F(n,k+1) + (k-n)\,F(n,k) = 0$$

bzgl. k erzeugt wurde.
Als weiteres Beispiel betrachte ich die Legendre-Polynome, für die die Beziehungen (4)–(5) gelten. Hier haben wir also das Polynomsystem $(D := D_x)$

$$(x^2-1)D^2 + 2xD - n(1+n) = 0 \quad \text{sowie} \quad (n+2)N^2 - (3+2n)xN + (n+1) = 0\ .$$

Die Gröbnerbasis des erzeugten Linksideals bzgl. der Termordnung (D, N, n, x) ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
&\Big\{(x^2-1)D^2 + 2xD - n(1+n),\\
&(1+n)ND - (1+n)xD - (1+n)^2,\\
&(x^2-1)ND - (1+n)xN + (1+n), && (6)\\
&(1+n)(x^2-1)D - (1+n)^2N + x(1+n)^2 && (7)\\
&(n+2)N^2 - (3+2n)xN + (n+1)\Big\}\ ,
\end{aligned}$$

wobei ich der besseren Lesbarkeit halber die Operatoren D und N wieder rechts positioniert habe. Hier wurden also D-Potenzen weitestgehend eliminiert, und Gleichungen (6)–(7) entsprechen den Beziehungen

$$(x^2-1)P'_{n+1}(x) = (1+n)\left(xP_{n+1}(x) - P_n(x)\right) \tag{8}$$

$$(x^2-1)P'_{n}(x) = (1+n)\left(P_{n+1}(x) - xP_n(x)\right) \tag{9}$$

zwischen den Legendre-Polynomen und ihren ersten Ableitungen. Man sieht also, daß auf diesem Wege neue Beziehungen (zwischen den Binomialkoeffizienten bzw. zwischen den Ableitungen der Legendre-Polynome) **hergeleitet** wurden.

Analog lassen sich mit dieser Methode Rekursionen für **holonome Summen** herleiten. Betrachten wir beispielsweise

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} F(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_n(x) ,$$

dann findet man mit dem Produktalgorithmus zunächst die holonomen Rekursionen

$$(n-k+1)F(n+1,k) - (1+n)F(n,k) = 0$$

sowie

$$(2+k)^2F(n,k+2) - (3+2k)(n-k-1)xF(n,k+1) + (n-k)(n-k-1)F(n,k) = 0$$

für den Summanden $F(n,k)$. In der Gröbnerbasis des von den zugehörigen Polynomen

$$(n-k+1)N - (1+n)$$

sowie

$$(2+k)^2K^2 - (3+2k)(n-k-1)xK + (n-k)(n-k-1)$$

bzgl. der Termordnung (k,n,K,N) erzeugten Linksideals liegt das k-freie Polynom

$$(2+n)^2K^2N^2 - K(2+n)(3+2n)(K+x)N + (1+n)(2+n)(1+K^2+2Kx) ,$$

welches einer k-freien Rekursion für $F(n,k)$ entspricht. Da bei der Summation über $k \in \mathbb{Z}$ die verschobenen Summen

$$s(n) = \sum_k F(n,k) = \sum_k F(n,k+1) = \sum_k F(n,k+2)$$

alle dieselbe Summenfunktion $s(n)$ liefern, liefert die Substitution $K := 1$ die gültige holonome Rekursion

$$(2+n)s(n+2) - (3+2n)(1+x)s(n+1) + 2(1+n)(1+x)s(n) = 0$$

für $s(n)$.

Die gezeigte Methode ist zur Generierung von Identitäten im Prinzip universell einsetzbar, benötigt jedoch den komplizierten Apparat des (nichtkommutativen) Buchberger-Algorithmus

und erbt die damit verbundenen Nachteile. Eine wesentliche Hürde stellt die Komplexität bei Problemen mit vielen Variablen dar.
Interessiert man sich wie bei obigem Beispiel (8)–(9) für die Erzeugung von Identitäten zwischen den Ableitungen $F^{(j)}(n+k,x)$ $(j,k\in\mathbb{N}_0)$ eines holonomen Systems $F(n,x)$, muß dies aber nicht unbedingt sein. Es geht in vielen Fällen bereits mit **linearer** Algebra! Dazu muß man aber mehr Information hineinstecken. Die geeignete über die holonomen Beziehungen hinausgehende Information besteht in einer Beziehung der Form

$$F'(n,x)=\sum_{k=0}^{m} r_k(n,x)F(n+k,x)\ ,$$

mit rationalen Funktionen r_k bzgl. n und x, einer **Ableitungsregel** für $F(n,x)$ also, sofern erhältlich. Es zeigt sich, daß in der Praxis holonome Systeme (wie beispielsweise Systeme orthogonaler Polynome etc., s. z. B. [1], 22.8, und [19]) so strukturstark sind, daß eine Ableitungsregel verfügbar ist. Man kann zeigen, daß Summe und Produkt solcher Systeme in der Regel auch wieder holonome Systeme mit Ableitungsregel darstellen [19], und Abhängigkeiten zwischen den Ableitungen $F^{(j)}(n+k,x)$ $(j,k\in\mathbb{N}_0)$ können mit reiner linearer Algebra gefunden werden.
Auf diese Weise wurde z. B. die Beziehung

$$\begin{aligned}
P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad = \quad & -\frac{2(\alpha+n)(\beta+n)}{(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)}\,P_{n-1}^{(\alpha,\beta)\prime}(x)\\
&+\frac{2(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}\,P_{n}^{(\alpha,\beta)\prime}(x)\\
&+\frac{2(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}\,P_{n+1}^{(\alpha,\beta)\prime}(x)
\end{aligned}$$

für die Jacobi-Polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ([1], Kapitel 22) automatisch erzeugt. Hierbei war die Zielsetzung, daß die auftretenden Koeffizientenfunktionen von $P_{n+k}^{(\alpha,\beta)\prime}(x)$ nicht von x abhängen sollen. Dies ist für Fragestellungen aus der Spektralapproximation (s. [9], § 2.3.2) von Bedeutung.
Zuletzt will ich darauf verweisen, daß die vorliegende Beschreibung natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben kann. Ich konnte weder auf den Gosper-Algorithmus [14] noch auf die Wilf-Zeilberger-Theorie der WZ-Paare und rationalen Zertifikate eingehen [33]–[37]. Auch Petkovšeks Algorithmus [24], der alle hypergeometrischen Termlösungen holonomer Rekursionsgleichungen berechnet, konnte keine Berücksichtigung finden.
Die in diesem Artikel durchgeführten Rechnungen wurden mit Mathematica und Reduce durchgeführt. Mein Dank gilt Prof. Peter Deuflhard, der mich ermutigt hat, mich mit dem vorliegenden Thema zu beschäftigen, Herbert Melenk, mit dem ich wichtige Gespräche über nichtkommutative Gröbnerbasen führen konnte, sowie Jochen Fröhlich, der mich auf die Spektralapproximation aufmerksam machte.

Literatur

[1] Abramowitz, M. und Stegun, I. A.: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publ., New York, 1964.

[2] Becker, Th. und Weispfenning, V.: Gröbner bases. A computational approach to commutative algebra. Springer, New York, 1991.

[3] Beke, E.: Die Irreducibilität der homogenen linearen Differentialgleichungen. Math. Ann. **45**, 1894, 278–294.

[4] Beke, E.: Die symmetrischen Functionen bei linearen homogenen Differentialgleichungen. Math. Ann. **45**, 1894, 295–300.

[5] Bernstein, I. N.: Modules over a ring of differential operators, study of the fundamental solutions of equations with constant coefficients. Functional Anal. Appl. **5**, 1971, 1–16 (Russisch); (89–101) (Englisch).

[6] Bernstein, I. N.: The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter. Functional Anal. Appl. **6**, 1972, 26–40 (Russisch); (273–285) (Englisch).

[7] Björk, J.-E.: Rings of Differential Operators. North-Holland Mathematical Library **21**, Amsterdam, 1979.

[8] Buchberger, B.: Symbolisches Rechnen: Grundlagen und Anwendungen. GAMM-Jahrestagung 1994, Braunschweig.

[9] Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. und Zang, T. A.: Spectral methods in fluid dynamics. Springer Series in Computational Physics, New York–Berlin, 1988.

[10] Deuflhard, P.: On algorithms for the summation of certain special functions. Computing **17**, 1976, 37–48.

[11] Deuflhard, P.: A summation technique for minimal solutions of linear homogeneous difference equations. Computing **18**, 1977, 1–13.

[12] Fleischer, J. und Tarasov, O. V.: Calculation of Feynman diagrams from their small momentum expansion. Erscheint 1994.

[13] Galligo, A.: Some algorithmic questions on ideals of differential operators. Proceedings EUROCAL 1985, Lecture Notes in Computer Science **204**, 1985, 413–421.

[14] Gosper Jr., R. W.: Decision procedure for indefinite hypergeometric summation. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **75**, 1978, 40–42.

[15] Graham, R. L., Knuth, D. E. und Patashnik, O.: Concrete Mathematics. A foundation for Computer Science. Addison-Wesley, Reading, Massachussets, second edition 1994.

[16] Kandri-Rody, A. und Weispfenning, V.: Non-commutative Gröbner bases in algebras of solvable type. J. Symbolic Computation **9**, 1990, 1–26.

[17] Koepf, W.: Power series in Computer Algebra. J. Symb. Comp. **13**, 1992, 581–603.

[18] Koepf, W.: A package on formal power series. Mathematica Journal **4**, 1994, 62–69.

[19] Koepf, W.: Algorithmic work with orthogonal polynomials and special functions. Konrad-Zuse-Zentrum Berlin (ZIB), Preprint SC 94-5, 1994.

[20] Koepf, W. und Schmersau, D.: Spaces of functions satisfying simple differential equations. Konrad-Zuse-Zentrum Berlin (ZIB), Technical Report TR 94-2, 1994.

[21] Koornwinder, T. H.: On Zeilberger's algorithm and its q-analogue: a rigorous description. J. of Comput. and Appl. Math. **48**, 1993, 91–111.

[22] Melenk, H. und Apel, J.: REDUCE package NCPOLY: Computation in non-commutative polynomial ideals. Konrad-Zuse-Zentrum Berlin (ZIB), 1994.

[23] Paule, P. und Schorn, M.: A MATHEMATICA version of Zeilberger's algorithm for proving binomial coefficient identities. J. Symbolic Computation, erscheint 1994.

[24] Petkovšek, M.: Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients. J. Symbolic Comp. **14**, 1992, 243–264.

[25] Salvy, B. und Zimmermann, P.: GFUN: A package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. Rapports Techniques **143**, INRIA, Rocquencourt, 1992.

[26] Stanley, R. P.: Differentiably finite power series. Europ. J. Combinatorics **1**, 1980, 175–188.

[27] Strehl, V.: Definite Summation. In: Computeralgebra in Deutschland: Bestandsaufnahme, Möglichkeiten, Perspektiven. Herausgegeben von der Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV, GAMM, Passau und Heidelberg, 1993.

[28] Strehl, V.: Binomial sums and identities. Maple Technical Newsletter **10**, 1993, 37–49.

[29] Takayama, N.: Gröbner basis and the problem of contigous relations. Japan J. Appl. Math. **6**, 1989, 147–160.

[30] Takayama, N.: An algorithm of constructing the integral of a module—an infinite dimensional analog of Gröbner basis. Proc. of ISSAC 90, ACM Press, New York, 1990, 206–211.

[31] Takayama, N.: Gröbner basis, integration and transcendental functions. Proc. of ISSAC 90, ACM Press, New York, 1990, 152–156.

[32] Wilf, H. S.: Generatingfunctionology. Academic Press, Boston, 1990.

[33] Wilf, H. S.: Identities and their computer proofs. "SPICE" Lecture Notes, 31. August–2. September 1993. Zu erhalten als anonymous ftp Datei `pub/wilf/lecnotes.ps` auf dem Server `ftp.cis.upenn.edu`.

[34] Wilf, H. S. und Zeilberger, D.: Rational functions certify combinatorial identities. J. Amer. Math. Soc. **3**, 1990, 147–158.

[35] Wilf, H. S. und Zeilberger, D.: Towards computerized proofs of identities. Bull. of the Amer. Math. Soc. **23**, 1990, 77–83.

[36] Wilf, H. S. und Zeilberger, D.: An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "q") multisum/integral identities. Invent. Math. **108**, 1992, 575–633.

[37] Wilf, H. S. und Zeilberger, D.: Rational function certification of hypergeometric multi-integral/sum/"q" identities. Bull. of the Amer. Math. Soc. **27**, 1992, 148–153.

[38] Zeilberger, D.: A holonomic systems approach to special functions identities. J. Comput. Appl. Math. **32**, 1990, 321–368.

[39] Zeilberger, D.: A fast algorithm for proving terminating hypergeometric identities. Discrete Math. **80**, 1990, 207–211.

[40] Zeilberger, D.: The method of creative telescoping. J. Symbolic Computation **11**, 1991, 195–204.

[41] Zeilberger, D.: Three recitations on holonomic systems and hypergeometric series. Proc. of the 24th Séminaire Lotharingen. D. Foata (Herausgeber), Publ. I. R. M. A. Strasbourg, 5–37.