

Karin Gatermann

Gruppentheoretische Konstruktion  
von  
symmetrischen Kubaturformeln

---

Herausgegeben vom  
Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin  
Heilbronner Strasse 10  
1000 Berlin 31  
Verantwortlich: Dr. Klaus André  
Umschlagsatz und Druck: Rabe KG Buch- und Offsetdruck Berlin  
ISSN 0933-789X

---

Karin Gatermann

Gruppentheoretische Konstruktion  
von  
symmetrischen Kubaturformeln

**Abstract**

$G$ -invariant cubature formulas for numerical integration over  $n$ -dimensional,  $G$ -invariant integration regions are computed symbolically. The nodes are the common zeros of some  $d$ -orthogonal polynomials which build an  $H$ -basis of an ideal. Approaches for these polynomials depending on parameters are made with the help of the theory of linear representations of a group  $G$ . This theory is also used for the effective computation of necessary conditions which determines the parameters. Another approach uses invariant theory and gröbner bases.

---

# Vorwort

Diese Arbeit entstand als Dissertation während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg. Ich möchte mich bei allen Mitarbeitern für die freundliche Atmosphäre und bei den Gutachtern, Prof. B. Werner und Prof. H. M. Möller, für ihre Geduld bei den vielen, ausführlichen Diskussionen bedanken.

Beim Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin bedanke ich mich für die Veröffentlichung.

Berlin im Januar 1990

Karin Gatermann

---

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung

<b>1</b>	<b>Der Zusammenhang zwischen Kubaturformeln und Idealen</b>	<b>7</b>
1.1	Problembeschreibung . . . . .	7
1.2	Konstruktion mit Hilfe von orthogonalen Polynomen . . . . .	11
1.3	Kubaturformeln vom Grad $2\nu - 1$ mit minimaler Knotenzahl	21
1.4	Gröbner-Basis: eine weitere Idealbasis . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Überblick über die Theorie der linearen Darstellungen</b>	<b>30</b>
2.1	Lineare Darstellungen . . . . .	30
2.2	Irreduzible Darstellungen, kanonische Zerlegung . . . . .	32
2.3	Charakter einer linearen Darstellung . . . . .	33
2.4	Konkrete Berechnung der Konglomerate . . . . .	35
2.5	Kronecker-Produkte von linearen Darstellungen . . . . .	37
2.6	Irreduzible Darstellungen und Charaktere von $D_3, R_{O_3}, D_4, S_4$	38
2.7	Übertragung auf reelle lineare Darstellungen . . . . .	41
<b>3</b>	<b>G-invariante Kubaturformeln und lineare Darstellungen</b>	<b>44</b>
3.1	Beispiele für lineare Darstellungen auf Polynomräumen . . . . .	44
3.2	G-invariante Ansätze . . . . .	49
3.3	Die Konstruktion von G-invarianten Kubaturformeln mit Hilfe von linearen Darstellungen . . . . .	64

<b>4</b>	<b>Konstruktion mit Invarianten</b>	<b>82</b>
4.1	Überblick über die Invariantentheorie . . . . .	82
4.2	Invariantenbasis und $\dim P_d^G$ für Untergruppen von Spiegelungsgruppen . . . . .	86
4.3	Konstruktion mit $G$ -invarianten Polynomen . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Verallgemeinerte Kronrod-Formeln</b>	<b>102</b>
5.1	Paare . . . . .	102
5.2	Paare, konstruiert mit linearen Darstellungen von unten nach oben . . . . .	104
	Literaturverzeichnis	

# Einleitung

In vielen numerischen Verfahren müssen Integrale berechnet werden. Die Integration erfolgt meistens numerisch mit Quadraturformeln bzw. Kubaturformeln

$$Q(f) = \sum_{i=1}^n A_i f(\underline{y}_i), \quad A_i \in \mathbb{R}, \underline{y}_i \in \mathbb{R}^N$$

für Integrale über mehrdimensionale Integrationsgebiete  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ . Bei der Methode der finiten Elemente zum Beispiel kommen als Integrationsgebiete Dreiecke, Quadrate, Tetraeder und Würfel vor. Die Gebiete haben also eine gewisse Symmetrie (sie sind invariant unter einer Gruppe  $G$  von linearen oder affin linearen Transformationen). Es ist üblich, Kubaturformeln zu benutzen, die die gleiche Symmetrie wie das Integral haben, die also symmetrisch oder  $G$ -invariant sind. Eine Kubaturformel ist genau dann  $G$ -invariant, wenn die Menge der Knoten  $\underline{y}_i$   $G$ -invariant ist und zwei Knoten gleiches Gewicht haben, wenn sie durch eine Transformation  $t \in G$  auseinander hervorgehen.

Im allgemeinen sind die Formeln von einem Grad  $d$ , das heißt sie integrieren alle Polynome vom Grad  $d$  oder kleiner exakt.

In dieser Arbeit werden  $G$ -invariante Kubaturformeln für ein vorgegebenes Integral und vorgegebenen Grad  $d$  konstruiert.

Bisher wurden  $G$ -invariante Kubaturformeln mit numerischen und algebraischen Methoden konstruiert. In Stroud [69] werden viele Kubaturformeln für verschiedene Gebiete angegeben. Da es reicht, eine Polynombasis exakt zu integrieren, ist eine Kubaturformel eine Lösung eines Systems von nichtlinearen Gleichungen. Für  $G$ -invariante Formeln vereinfacht sich das System nach dem Satz von Sobolev [66] (siehe Satz 1.2). Kubaturformeln zu konstruieren, bedeutet also, ein System von nichtlinearen Gleichungen mit spezieller Gestalt zu lösen. In den Arbeiten [9], [11], [18], [37], [55], [70] wurde Invariantentheorie zur Aufstellung des Systems benutzt und anschließend wurde es numerisch gelöst.

Da die Menge der Polynome, die in den Knoten verschwinden, ein Ideal ist, wurde von Möller [46] Idealtheorie verwendet (siehe Satz 1.10). Dabei wurde keine Symmetrie benutzt. Die daraus hervorgegangenen algebraischen Methoden, die T- (Morrow und Patterson [50] und Schmid [60], [61], [63]) und die S-Methode (Cools und Haegemans [8], [13]), sind auf zweidimensionale Integrale beschränkt, die invariant unter  $D_4$  oder einer Untergruppe davon sind. Mit diesen Methoden können nur Kubaturformeln mit ungeradem Grad konstruiert werden, wobei nur gewisse Knotenanzahlen möglich sind.

Als neues Hilfsmittel wird in dieser Arbeit die Theorie der linearen Darstellungen (Serre [64] und Stiefel und Fässler [67]) herangezogen. Eine Kernaussage der Theorie ist, daß jeder  $G$ -invariante Vektorraum die direkte Summe von Konglomeraten ist, die Vektoren von jeweils dem gleichen Symmetriotyp enthalten. Die Konglomerate können mittels Projektionen berechnet werden. Dadurch sind alle möglichen  $G$ -invarianten Unterräume bekannt. Die Theorie wird in Kapitel 2 zusammenfassend dargestellt.

Ziel dieser Arbeit war es, Methoden zur möglichst exakten Berechnung von  $G$ -invarianten Kubaturformeln zu entwickeln. Es sollte ein besseres und tieferes Verständnis für die Konstruktion von Kubaturformeln von beliebigem Grad und beliebiger Knotenzahl erreicht werden. Die entwickelten Methoden sollten für alle bei Integrationsgebieten vorkommenden Gruppen gelten. Übrigens sind diese Methoden auch bei anderen Problemen mit Symmetrie, insbesondere der exakten Lösung von symmetrischen nichtlinearen Gleichungssystemen von Interesse. Alle exakten Rechnungen wurden in REDUCE ([38], [58]) durchgeführt.

Das Kapitel 1 gibt einen einfachen Umriß der Konstruktion von Kubaturformeln mit Hilfe von Idealtheorie. Diese ist eine Verallgemeinerung der Konstruktion von Gaußformeln für eindimensionale Integrale. Dort sind die Knoten die Nullstellen eines orthogonalen Polynoms, und die Gewichte ergeben sich aus einem linearen Gleichungssystem. Bei der Übertragung dieses Konstruktionsprinzips von Möller [46] auf mehrdimensionale Integrale werden die gemeinsamen Nullstellen von mehreren, linear unabhängigen,  $d$ -orthogonalen Polynomen benutzt. Dazu müssen die Polynome eine H-Basis (das ist eine spezielle Idealbasis) des von ihnen erzeugten Ideals bilden. Die Gewichte sind wiederum die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall sind die Gewichte im allgemeinen nicht alle positiv und die Knoten liegen nicht notwendig im Integrationsgebiet. Die Überprüfung der Eigenschaft der H-Basis ist im allgemeinen zwar kompliziert, aber für Kubaturformeln mit minimaler Knotenzahl konnte

Möller [47] ein Konstruktionsverfahren angeben. Auch Polynome, die die Bedingung des Satzes von Max Noether erfüllen, bilden eine H-Basis. Das führt allerdings auf Kubaturformeln mit recht vielen Knoten.

Es ist bekannt, daß für  $G$ -invariante Kubaturformeln das zugehörige Ideal der Polynome, die in den Knoten verschwinden,  $G$ -invariant ist. Bei der T- und der S-Methode, wird das für  $G = D_4$  und einigen Untergruppen von  $D_4$  ausgenutzt. Dort wird mit parameterabhängigen,  $d$ -orthogonalen Polynomen, die einen  $G$ -invarianten Vektorraum aufspannen, angesetzt. Die Parameter ergeben sich dann aus für die Konstruktion notwendigen Bedingungen (der Existenz von Syzygien).

Eines der Hauptergebnisse dieser Arbeit ist folgendes: Mit Hilfe der Theorie der linearen Darstellungen lassen sich leicht erfolgversprechende Ansätze für eine H-Basis eines  $G$ -invarianten Ideals machen. Diese Polynome können aus je einem Konglomerat gewählt werden, also von je einem Symmetrietyp sein, und von Parametern abhängen. Das grundsätzliche Vorgehen ist dann folgendes: Die Parameter ergeben sich aus den notwendigen Bedingungen für die H-Basis, also der Existenz von Syzygien (nichttriviale Darstellungen des Nullpolynoms). Die entscheidende Verbesserung besteht darin, daß die Syzygien im Falle der  $G$ -Invarianz jeweils aus einem Konglomerat gewählt werden können. Durch diese Vereinfachung werden die Syzygien im allgemeinen erst praktisch berechenbar. Die gemeinsamen Nullstellen sind die Knoten. Die Gewichte werden leicht aus einem linearen Gleichungssystem bestimmt.

Für die Anwendung der Theorie der linearen Darstellungen gibt es nur die Einschränkungen, daß die Gruppe endliche Ordnung haben muß und ihre irreduziblen Darstellungen bekannt sein müssen. Im Gegensatz zur T- und der S-Methode gibt es also keine Einschränkungen an die Gruppe. In den Beispielen in dieser Arbeit werden insbesondere  $D_3$ ,  $D_4$  und  $S_4$  und einige ihrer Untergruppen betrachtet. In Beispiel 3.22 wird ein Kontinuum von  $S_4$ -invarianten Formeln für den Tetraeder  $T_3$  konstruiert, von denen bisher nur 4 bekannt sind. In Beispiel 3.21 wird durch einfache Rechnung bewiesen, daß es keine  $Ro_3$ -invariante Kubaturformel vom Grad 6 mit 10 Knoten gibt. Exakte Werte einer  $D_4$ -invarianten Formel vom Grad 15 für  $E_2^{r^2}$  werden in Beispiel 3.23 angegeben. Für diese Formel waren bisher nur numerische Werte bekannt. Sie kann mit der T- oder der S-Methode nicht konstruiert werden.

In Kapitel 4 wird ein weiterer Ansatz beschrieben. Es wird versucht, die gemeinsamen Nullstellen von  $G$ -invarianten Polynomen als Knoten zu verwenden. (Die Polynome spannen also nicht nur einen  $G$ -invarianten Vektorraum auf, sondern sind selbst  $G$ -invariant.) Dabei wird Invariantentheorie benutzt. Eine Invariantenbasis besteht aus einigen  $G$ -invarianten Polynomen, so

daß jedes weitere  $G$ -invariante Polynom als Polynom in diesen  $G$ -invarianten Polynomen dargestellt werden kann. Die Tatsache, daß es für jeden Invariantenring (der Menge der  $G$ -invarianten Polynome) eine Invariantenbasis gibt, geht auf Hilbert [39] zurück. Das bedeutet eine wesentliche Vereinfachung beim Umgang mit  $G$ -invarianten Polynomen. Dadurch zerfällt die Suche nach gemeinsamen Nullstellen von  $G$ -invarianten Polynomen in mehrere kleine nichtlineare Gleichungssysteme.

Es wird gezeigt, daß man für einige Gruppen, die Untergruppen von Spiegelungsgruppen sind, mit Hilfe der Theorie der linearen Darstellungen leicht eine gute Invariantenbasis finden kann.

Um  $G$ -invariante Kubaturformeln zu konstruieren, kann man basierend auf einer Idee von Möller [49] wie folgt vorgehen. Man macht einen Ansatz aus  $d$ -orthogonalen,  $G$ -invarianten Polynomen, die von Parametern abhängen und die in den neuen Variablen dargestellt werden, die durch die Invariantenbasis gegeben sind. Die Parameter werden so bestimmt, daß die Polynome eine Gröbner-Basis bzgl. einer Ordnung bilden, die von der Gruppe  $G$  abhängt. Die Knoten ergeben sich als die gemeinsamen Nullstellen und die Gewichte als die Lösung eines linearen Gleichungssystems. In den Beispielen 4.15 und 4.20 ergeben sich mit dieser Methode eine neue  $S_4$ -invariante Kubaturformel für das Tetraeder  $T_3$  und ein Kontinuum von neuen  $D_3$ -invarianten Formeln fürs Dreieck  $T_2$ .

Der Weg mit den linearen Darstellungen ist aber im allgemeinen besser, da im Ansatz weniger Parameter auftreten und sich Formeln mit weniger Knoten ergeben.

In Kapitel 5 wird dieser Weg auf die Konstruktion von Paaren von  $G$ -invarianten Kubaturformeln spezialisiert. Ein Paar von  $G$ -invarianten Kubaturformeln besteht wie bei den Kronrod-Formeln für eindimensionale Integrale aus 2 Formeln unterschiedlichen Grades, wobei die Knoten der Formel niedrigeren Grades auch Knoten der zweiten Formel sind. Solche Paare sind besonders gut für adaptive Integrationsprogramme geeignet.

In einem Konstruktionsweg von Paaren geht man von einer  $G$ -invarianten Formel  $Q_1$  aus und konstruiert die Formel höheren Grades, in dem man mit Polynomen ansetzt, die in den Knoten von  $Q_1$  verschwinden. Mit der Theorie der linearen Darstellungen ergeben sich gute Ansätze aus Polynomen aus den Konglomeraten. Die letzten Beispiele 5.4 und 5.5 zeigen noch einmal die Leistungsfähigkeit des Konstruktionsprinzips mit Hilfe der linearen Darstellungen.

# Kapitel 1

## Der Zusammenhang zwischen Kubaturformeln und Idealen

In diesem Kapitel wird das Problem der Konstruktion von Kubaturformeln zunächst genau beschrieben. Gemeinsame Nullstellen von hinreichend orthogonalen Polynomen können als Knoten der Formel verwendet werden, wenn die Polynome eine spezielle Basis des von ihnen erzeugten Ideals bilden.

Die bekannten Zusammenhänge mit H-Basen, Gröbner-Basen, Syzygien, unteren Schranken für die Knotenanzahl bei vorgegebenem Grad werden aufgeführt, insofern sie in den folgenden Kapiteln benötigt werden, wo diese Begriffe in Zusammenhang mit Symmetrie benutzt werden. Einen guten Überblick findet man auch in Möller [49] und Mysovskikh [55].

### 1.1 Problembeschreibung

Gegeben sei ein **Integral**

$$I(f) := \iint_{\Omega} w(\underline{x}) \cdot f(\underline{x}) \, d\underline{x},$$

wobei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  ein **Integrationsgebiet** mit inneren Punkten,  $w(\underline{x}) \in C(\mathbb{R}^N)$  eine **Gewichtsfunktion** und  $f \in C(\mathbb{R}^N)$  eine zu integrierende Funktion sind.

Sei  $I(1) < \infty$ . Im folgenden wird das Integral als **positiv** vorausgesetzt, d.h.

$$I(f^2) > 0 \quad \forall f \in C(\Omega) \setminus \{0\} \quad .$$

Eine **Kubaturformel**

$$Q(f) = \sum_{i=1}^n A_i f(\underline{y}_i)$$

mit **Knoten**  $\underline{y}_i \in \mathbb{R}^N$  und **Gewichten**  $A_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, i = 1, \dots, n$  ist eine Näherung für  $I(f)$ . Eine Kubaturformel hat den **Grad**  $d$ , wenn  $I|_{\mathbb{P}_d} = Q|_{\mathbb{P}_d}$  und  $I(p) \neq Q(p)$  für ein  $p \in \mathbb{P}_{d+1}$  gelten, wobei  $\mathbb{P}_d \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$  den Raum der Polynome in den Variablen  $x_1, \dots, x_N$  vom Grad kleiner oder gleich  $d$  bezeichnet. Es gilt

$$\dim \mathbb{P}_d = \binom{d+N}{N}.$$

Da vorausgesetzt wird, daß  $\Omega$  innere Punkte enthält, spannen die Polynome  $p \in \mathbb{P}_d$  auch als Funktionen  $p|_{\Omega}$  einen Raum der Dimension  $\dim \mathbb{P}_d$  auf.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Problem, die Knoten  $\underline{y}_i$  und Gewichte  $A_i$  für ein gegebenes Gebiet  $\Omega$ , eine Gewichtsfunktion  $w$  und einen gegebenen Grad  $d$  zu berechnen. Das Gleichungssystem

$$Q(p_j) = I(p_j) \quad (p_j \text{ Basis von } \mathbb{P}_d) \quad (1.1)$$

in der Unbekannten  $A_i, \underline{y}_i$  muß also gelöst werden. Insbesondere werden folgende Integrale betrachtet:

$C_2$  : das Quadrat  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$  mit  $w \equiv 1$ ,

$C_3$  : der Würfel  $\Omega = [-1, 1]^3$  mit  $w \equiv 1$ ,

$T_2$  : das Dreieck  $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, \quad x+y \leq 1 \}$  mit  $w \equiv 1$ ,

$T_3$  : das Tetraeder  $\Omega = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, \quad x+y+z \leq 1 \}$   
mit  $w \equiv 1$ ,

$E_2^{r^2}$  : die Ebene  $\Omega = \mathbb{R}^2$  mit Gewichtsfunktion  $w(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$ ,

$C_2^{\frac{1}{2}}$  : das Quadrat  $\Omega = [-1, 1]^2$  mit Gewichtsfunktion  
 $w(x, y) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}$ ,

$C_2^{-\frac{1}{2}}$  : das Quadrat  $\Omega = [-1, 1]^2$  mit Gewichtsfunktion  
 $w(x, y) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

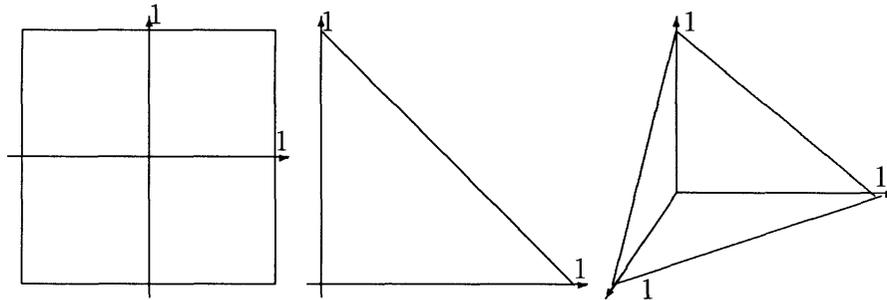


Abbildung 1.1: Integrationsgebiete  $\Omega$

Die Standardbezeichnungen  $C_2 - E_2^2$  wurden Stroud [69] entnommen, wo man auch viele Kubaturformeln für diese Gebiete findet.

Alle obigen Integrale sind  $G$ -invariant unter einer Gruppe  $G$  von linearen bzw. affin linearen Transformationen, d.h.

$$I(f) = I(f \circ t) \quad \forall t \in G \quad .$$

Das ist erfüllt, wenn

$$t(\Omega) = \Omega \quad \text{und} \quad w(t(\underline{x})) = w(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega, t \in G$$

gilt. Dann betrachtet man auch  $G$ -invariante Kubaturformeln  $Q$ , d.h.

$$Q(f) = Q(f \circ t) \quad \forall t \in G \quad .$$

Eine  $G$ -invariante Kubaturformel  $Q$  hat als Knotenmenge eine Vereinigung von  $G$ -Koronen ( $G$ -Orbits)  $k_y = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^N / \underline{x} = t(\underline{y}) \text{ für ein } t \in G\}$  und zwei Gewichte  $A_i, A_j$  sind gleich, wenn die zugehörigen Knoten  $\underline{y}_i, \underline{y}_j \in \mathbb{R}^N$  zur gleichen  $G$ -Korona gehören. Die Anzahl der Punkte in einer  $G$ -Korona hängt von der Gruppe  $G$  und dem Typ der  $G$ -Korona ab.

$C_2, E_2^2, C_2^{\frac{1}{2}}, C_2^{-\frac{1}{2}}$  sind z. B. invariant unter der Gruppe  $D_4 = \{id, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ ,

$$\begin{aligned} \text{wobei } r : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longrightarrow (-y, x) \\ \text{und } s : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longrightarrow (-x, y) \end{aligned}$$

die Gruppe  $D_4$  erzeugen. Es gibt  $D_4$ -Koronen mit 8 oder 4 Punkten oder mit einem Punkt, dem Ursprung  $(0, 0)$ .

**Beispiel 1.1 :**

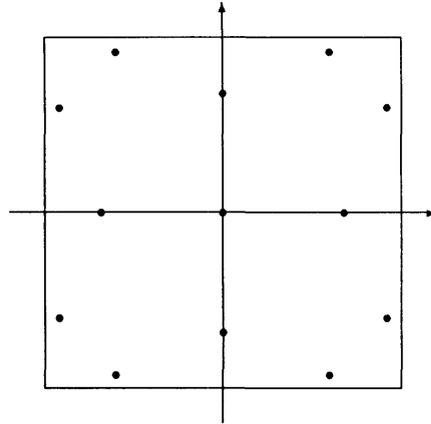
$$\begin{aligned}
 Q(f) = & \frac{1}{81} \cdot 4 \cdot f(0,0) + \\
 & \frac{49}{324} \cdot 4 \cdot (f(r,0) + f(-r,0) + f(0,r) + f(0,-r)) + \\
 & \frac{31}{648} \cdot 4 \cdot (f(s,t) + f(s,-t) + f(-s,t) + f(-s,-t) + \\
 & f(t,s) + f(-t,s) + f(t,-s) + f(-t,-s))
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } r^2 = \frac{12}{35},$$

$$s^2 = \frac{93 + 3\sqrt{186}}{155},$$

$$t^2 = \frac{93 - 3\sqrt{186}}{155}$$

ist eine Formel mit 3  $D_4$ -Koronen  
verschiedenen Typs vom Grad 7  
(Maxwell,  $C_2:7-3$  in Stroud [69]).



Ein Vektorraum  $V \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$  heißt  $G$ -invariant, wenn

$$p(t(\underline{x})) \in V \quad \forall p(\underline{x}) \in V \quad \forall t \in G$$

gilt. Zum Beispiel  $\mathbb{P}_d$  ist  $G$ -invariant. Ein Polynom  $p$  heißt  $G$ -invariant, wenn

$$p(t(\underline{x})) = p(\underline{x}) \quad \forall t \in G$$

gilt. Der Raum aller  $G$ -invarianten Polynome  $p \in \mathbb{P}_d$  wird mit  $\mathbb{P}_d^G$  bezeichnet. Ein Polynom  $p \in V$  in einem  $G$ -invarianten Vektorraum  $V$  ist nicht notwendig selbst  $G$ -invariant.

**Satz 1.2 (Sobolev [66]):** Seien das Integral  $I$  und die Kubaturformel  $Q$   $G$ -invariant. Dann sind äquivalent:

- i.)  $Q$  hat den Grad  $d$ .
- ii.)  $Q(p) = I(p)$  gilt für alle  $G$ -invarianten Polynome  $p \in \mathbb{P}_d^G$ .

In Satz 1.2 beschreibt  $G$  nicht notwendig die volle Symmetrie des Integrals.  $G$  kann eine Untergruppe sein. Als Untergruppen von  $D_4$  sind unter anderen  $S_{2a} := \{id, r^2, s, sr^2\}$  und  $Z_2 = \{id, r^2\}$  gebräuchlich (siehe auch Definition 3.4).

Mit Satz 1.2 ergibt sich eine bekannte Methode zur Konstruktion von  $G$ -invarianten Kubaturformeln  $Q$  vom Grad  $d$ : Man löst numerisch das nicht-lineare Gleichungssystem

$$Q(p_i) = I(p_i) \quad i = 1, \dots, \dim \mathbb{P}_d^G, \quad (1.2)$$

wobei  $p_i \in \mathbb{P}_d^G$  eine Basis der  $G$ -invarianten Polynome von Grad  $\leq d$  bilden. Dabei setzt man  $Q$  mit soviel unbekanntenen Größen an, wie das System Gleichungen hat, damit eine Lösung erwartet werden kann. Es gibt allerdings Kubaturformeln, die Lösungen eines Systems mit weniger Unbekannten als Gleichungen sind.

Dieser numerische Weg wird in dieser Arbeit **nicht** weiter betrachtet. Statt dessen wird das Gleichungssystem (1.2) mit Hilfe von orthogonalen Polynomen, Idealtheorie, Theorie linearer Darstellungen und Invariantentheorie in kleinere Teilprobleme zerlegt.

## 1.2 Konstruktion mit Hilfe von orthogonalen Polynomen

Um die Formeln aus gemeinsamen Nullstellen von Polynomen konstruieren zu können, betrachtet man zunächst den umgekehrten Weg.

**Satz 1.3** (Hirsch, Stroud [69] S. 77): Sei  $Q$  eine Kubaturformel vom Grad  $d$  mit  $n$  Knoten  $y_i$  und sei  $n < \dim \mathbb{P}_d$ .

Dann gilt:

i.) Es gibt ein  $m \geq 1$ , so daß linear unabhängige Polynome  $p_j \in \mathbb{P}_d$ ,  $j = 1, \dots, m$  existieren, die die Knoten als gemeinsame Nullstellen haben.

ii.) Für alle  $j = 1, \dots, m$  gilt  $I(fp_j) = 0$  für alle  $f \in \mathbb{P}_d$  mit  $fp_j \in \mathbb{P}_d$ .

BEWEIS: Bestimmt man ein  $p \in \mathbb{P}_d$ , das in den  $n$  Knoten verschwindet, so ergeben sich  $n$  lineare homogene Gleichungen für  $\dim \mathbb{P}_d$  Unbekannte (die Koeffizienten der Monome). Wegen  $n < \dim \mathbb{P}_d$  gibt es mindestens eine Lösung. Für  $fp_j \in \mathbb{P}_d$  gilt

$$I(fp_j) = Q(fp_j) = \sum_{i=1}^n A_i f(\underline{y}_i) p_j(\underline{y}_i) = 0 \quad \blacksquare$$

Da das Integral  $I$  positiv ist, wird durch  $I(f \cdot g)$  ein Skalarprodukt definiert. Ein Polynom  $p_j$  vom Grad  $s$  aus Satz 1.3 hat also nach ii.) die Eigenschaft, orthogonal zu allen Polynomen vom Grad  $d - s$  zu sein.

Ein Polynom  $p$  vom Grad  $s$ , das orthogonal zu allen Polynomen  $f \in \mathbb{P}_{s-1}$  ist, heißt **orthogonal**. Der Vektorraum der orthogonalen Polynome vom Grad  $s$  wird mit  $K_s$  bezeichnet. Er hat eine spezielle Basis. Für jedes Monom  $x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N}$  vom Grad  $s = i_1 + \cdots + i_N$  gibt es ein  $q \in \mathbb{P}_{s-1}$ , so daß  $P^{i_1, \dots, i_N}(x_1, \dots, x_N) = x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N} + q(\underline{x})$  orthogonal ist (Jackson, siehe Stroud [69] S. 69).

Formeln für die orthogonalen Polynome  $P^{i,j}$  bzw.  $P^{i,j,k}$  findet man für einige Integrale in Stroud [69] S. 71-74 oder für  $T_2, T_3, T_N$  in Grundmann und Möller [33]. Für Produktintegrale (z.B.  $C_2, E_2^2, C_3$ ) ergeben sich die orthogonalen Polynome  $P^{i,j}$  bzw.  $P^{i,j,k}$  als Produkte von orthogonalen Polynomen  $P^i$  für eindimensionale Integrale. In Davis und Rabinowitz [20] S. 33-42 werden orthogonale Polynome  $P^i$  aufgeführt.

Ein Polynom  $p$  vom Grad  $s$  (z.B.  $p_j$  in Satz 1.3 ii.)), das orthogonal zu allen Polynomen  $f \in \mathbb{P}_{d-s}$  ist, heißt **d-orthogonal** (Möller [46] S. 13).

**Lemma 1.4** : Jedes  $d$ -orthogonale Polynom  $p$  vom Grad  $s$  ( $d \geq s > \frac{d}{2}$ ) hat eine Darstellung

$$p = p_s + \sum_{i=d-s+1}^{s-1} p_i$$

mit  $p_s \in K_s$ ,  $p_s \neq 0$ ,  $p_i \in K_i$ ,  $i = d - s + 1, \dots, s - 1$ .

Als nächstes betrachtet man Folgerung i.) in Satz 1.3 näher. Die Menge  $\mathcal{A}$  der Polynome, die in den Knoten verschwinden, hat die Eigenschaft

$$f_1 p_1 + f_2 p_2 \in \mathcal{A} \quad \forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N], \quad p_1, p_2 \in \mathcal{A}.$$

Mengen mit dieser Eigenschaft heißen **Ideale**. Jedes Ideal  $\mathcal{A}$  im Polynomring  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$  hat nach dem Hilbertschen Basissatz eine endliche **Idealbasis**  $p_1, \dots, p_m$ , d.h.

$$\forall p \in \mathcal{A} \quad \exists \quad q_1, \dots, q_m \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N] \quad \text{mit} \quad p = \sum_{i=1}^m q_i p_i.$$

Man schreibt  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$ . Die Nullstellen von  $\mathcal{A}$  sind die gemeinsamen, affinen Nullstellen von  $p_1, \dots, p_m$ . Nach dem Satz von **Bezout** (Stroud [69] S. 20, Möller [46] S. 33f) haben  $N$  Polynome  $p_1, \dots, p_N$  in  $N$  Variablen entweder  $\text{Grad}(p_1) \cdot \text{Grad}(p_2) \cdots \text{Grad}(p_N)$  Nullstellen (mit mehrfachen und komplexen Nullstellen und Nullstellen im Unendlichen gerechnet) oder sie haben unendlich viele.

Hat ein Ideal  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$  endlich viele Nullstellen, so heißt es **nulldimensional**. Für nulldimensionale Ideale kann man die Anzahl der Nullstellen an der **Hilbertfunktion**  $H(k, \mathcal{A})$  (Möller [49] S. 181) ablesen.  $H(k, \mathcal{A}) := \dim \mathbb{P}_k - \dim(\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_k)$  gibt die Kodimension von  $\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_k$  in  $\mathbb{P}_k$  an.  $\mathcal{A}$  ist genau dann nulldimensional, wenn die Hilbertfunktion ab einem Grad  $K$  stationär wird, d.h.

$$H(k, \mathcal{A}) = H(K, \mathcal{A}) \quad \forall k \geq K \quad \text{gilt.}$$

Dann gibt  $n = H(K, \mathcal{A})$  die Anzahl der Nullstellen (mit komplexen und mehrfachen Nullstellen gerechnet) (Möller [49] S. 181) an.

Damit ist klar, wie Kubaturformeln konstruiert werden können.

**Satz 1.5** (Stroud [69] S. 112): Für ein Ideal  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$  seien folgende Bedingungen erfüllt:

- i.) Das Ideal  $\mathcal{A}$  hat genau  $n$  paarweise verschiedene, reelle Nullstellen  $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ .
- ii.) Jedes Polynom  $p \in \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_d$  ist  $d$ -orthogonal, kurz: für den Vektorraum  $\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_d$  gilt  $I_{|\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_d} = 0$ .

Dann gibt es Gewichte  $A_i \in \mathbb{R}$ , so daß durch

$$Q(f) = \sum_{i=1}^n A_i f(\underline{y}_i)$$

eine Kubaturformel mindestens vom Grad  $d$  gegeben ist.

BEWEIS: Da  $\mathcal{A}$  nulldimensional ist, gibt es ein  $K \in \mathbb{N}$  mit  $H(k, \mathcal{A}) = H(K, \mathcal{A}) \quad \forall k \geq K$ . Die Anzahl der Nullstellen ist  $n = H(K, \mathcal{A})$ . Da die Hilbertfunktion monoton wächst, gilt für die Kodimension  $H(d, \mathcal{A})$  von  $\mathcal{A}$  in  $\mathbb{P}_d$  also  $H(d, \mathcal{A}) \leq H(K, \mathcal{A}) = n$ . Es können also linear unabhängige Polynome  $f_j \in \mathbb{P}_d \setminus \mathcal{A}$ ,  $j = 1, \dots, H(d, \mathcal{A})$  mit  $\text{span}(f_1, f_2, \dots) \cap \mathcal{A} = \{0\}$  gewählt werden. Die Gewichte  $A_i \in \mathbb{R}$  ergeben sich dann als die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Q(f_j) = \sum_{i=1}^n A_i f_j(\underline{y}_i) = I(f_j) \quad j = 1, \dots, H(d, \mathcal{A}).$$

Die Koeffizientenmatrix hat den vollen Rang  $H(d, \mathcal{A}) \leq n$ , also mindestens eine Lösung. Wegen  $\mathbb{P}_d = \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_d \oplus \text{span}(f_1, f_2, \dots)$  und  $I|_{\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_d} = 0$  hat die Kubaturformel  $Q(f) = \sum_{i=1}^n A_i f(\underline{y}_i)$  mindestens den Grad  $d$ . ■

Von Stroud stammt eine Formulierung dieses Satzes mit Vektorräumen. Erst Möller [46] erkannte die Bedeutung des Begriffs Ideal für die Konstruktion von Kubaturformeln.

Aus der Positivität des Integrals folgt eine untere Schranke für die Knotenanzahl  $n$ .

**Satz 1.6** (Stroud [69] S. 118ff): Für Kubaturformeln vom Grad  $d = 2\nu - 2$  oder  $d = 2\nu - 1$  mit zugehörigem Ideal  $\mathcal{A}$  gilt für die Knotenanzahl

$$n \geq H(\nu - 1, \mathcal{A}) = \dim \mathbb{P}_{\nu-1}.$$

BEWEIS: Weil ein Polynom  $p \in \mathbb{P}_{\nu-1}$  vom Grad  $\nu - 1$  wegen  $I(p^2) > 0$  nicht  $d$ -orthogonal ist, gilt  $p \notin \mathcal{A}$ , also  $H(\nu - 1, \mathcal{A}) = \dim \mathbb{P}_{\nu-1}$ . ■

Ob Polynome  $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$ , die die Basis eines Ideals  $\mathcal{A}$  bilden, endlich viele affine gemeinsame Nullstellen haben, kann man z.B. daran ablesen, ob  $\mathcal{A}$  eine fundamentale Menge von einem Grad  $s$  enthält.

**Definition 1.7** (Schmid [61]): Eine Menge von Polynomen  $p_1, \dots, p_m$  vom Grad  $s$  heißt **fundamental** vom Grad  $s$ , wenn ihre homogenen Anteile vom Grad  $s$  den Raum aufspannen, der von den Monomen vom Grad  $s$  aufgespannt wird.

Ein Ideal  $\mathcal{A}$ , das ein **Fundamentalsystem** (fundamentale Menge) vom Grad  $s$  enthält, ist offensichtlich nulldimensional, weil dann  $H(s - 1, \mathcal{A}) = H(s, \mathcal{A}) = H(K, \mathcal{A}) \quad \forall K \geq s$  gilt. Die Anzahl der Nullstellen ist dann

$$n = H(s - 1, \mathcal{A}) = \dim \mathbb{P}_{s-1} - \dim(\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_{s-1}).$$

Nach Satz 1.5 ergibt sich folgender **Konstruktionsweg**: Man wählt  $d$ -orthogonale Polynome  $p_1, \dots, p_m$  so, daß sie endlich viele gemeinsame, einfache, reelle Nullstellen haben und überprüft, ob das Integral  $I$  auf dem Vektorraum  $(p_1, \dots, p_m) \cap \mathbb{P}_d = \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_d$  verschwindet.

Die letzte Bedingung folgt **nicht** aus der  $d$ -Orthogonalität einer Basis  $p_1, \dots, p_m$ :

$$I(fp_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad fp_j \in \mathbb{P}_d.$$

Denn gilt z.B. für  $p = f_1p_1 + f_2p_2 \in \mathbb{P}_d$  für  $f_1p_1$  und  $f_2p_2$  vom Grad  $d+1$ , weil sich die Monome vom Grad  $d+1$  wegheben, dann gilt  $p \in \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_d$ , aber  $I(p) = 0$  ist nicht gewährleistet. Gibt es allerdings eine andere Darstellung von  $p$ , existieren also

$$q_1, \dots, q_m \quad \text{mit} \quad q_j p_j \in \mathbb{P}_d \quad \text{und} \quad p = \sum_{j=1}^m q_j p_j,$$

so folgt  $I(p) = 0$ . Die Situation ist also gerettet, wenn man eine weitere Darstellung für alle derartigen  $p$  fordert.

**Definition 1.8** (Möller [46] S. 24, [49] S. 180): Die Polynome  $p_1, \dots, p_m$  bilden eine **kanonische Basis** oder **H-Basis** von  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$ , wenn alle Polynome

$$p := \sum_{j=1}^m q_j p_j, \quad q_j \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N], j = 1, \dots, m,$$

eine Darstellung

$$p = \sum_{j=1}^m f_j p_j, \quad f_j \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N], j = 1, \dots, m,$$

mit  $\text{Grad}(f_j p_j) \leq \text{Grad}(p)$ ,  $j = 1, \dots, m$  besitzen.

Durch Umformung ergibt sich

$$\sum_{j=1}^m (q_j - f_j) p_j = 0. \tag{1.3}$$

Darstellungen  $\sum g_j p_j = 0$  wie (1.3), die nichttriviale Darstellungen des Nullpolynoms sind, heißen **Syzygien** zu  $p_1, \dots, p_m$ . Für jede Syzygie läßt sich

mindestens ein Polynom  $p$  mit zwei unterschiedlichen Darstellungen wie oben bei der kanonischen Basis finden.

Für den Test auf kanonische Basis müssen linear unabhängige Syzygien nachgewiesen werden. Dieser Test ist im allgemeinen kompliziert, weil die Existenz von Syzygien mit beliebigem Grad der Komponentenpolynome  $g_j$  bzw. dazu äquivalente Gleichungen oder Bedingungen gezeigt werden müssen. Da durch Multiplikation von Syzygien mit Polynomen wieder Syzygien entstehen, sind die Syzygien mit niedrigem Grad von  $g_j$  besonders wichtig. In Spezialfällen braucht man nur die Existenz von Syzygien mit  $\text{Grad}(g_j) \leq 1$  oder  $\text{Grad}(g_j) \leq 2$  zu zeigen.

**Beispiel 1.9** : Sind  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}[x, y]$  linear unabhängige Polynome vom Grad 5, so testet man auf  $H$ -Basis folgendermaßen: Da es nur 7 Monome vom Grad 6 gibt, gibt es mindestens eine nichttriviale Linearkombination von  $xp_1, xp_2, xp_3, xp_4, yp_1, yp_2, yp_3, yp_4$  vom Grad 5 oder kleiner. Dieses Polynom

$$q = \sum_{j=1}^4 (a_j x + b_j y) p_j \in \mathbb{P}_5, \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

kann z.B. durch Koeffizientenvergleich der Monome vom Grad 6 bestimmt werden. Bilden  $p_1, p_2, p_3, p_4$  eine  $H$ -Basis, so gilt wegen  $q \in \mathcal{A} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  auch  $q \in \text{span}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ . Dazu äquivalent ist die Existenz einer Syzygie

$$\sum_{j=1}^4 (a_j x + b_j y - c_j) p_j = 0, \quad c_j \in \mathbb{R}.$$

Statt mit  $x$  und  $y$  multipliziert man dann mit  $x^2, xy, y^2$  und überprüft die Existenz von Syzygien mit  $\text{Grad}(g_j) \leq 2$ .

Die Eigenschaft der kanonischen Basis läßt sich in einem speziellen Fall mit Satz 1.11 einfach nachweisen.

Der folgende Satz über die Konstruktion von Kubaturformeln hat in dieser Arbeit eine zentrale Bedeutung.

**Satz 1.10** (Möller [46] S. 39): Für  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m) \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$  seien folgende Bedingungen erfüllt:

- i.)  $p_1, \dots, p_m$  sind  $d$ -orthogonal.
- ii.)  $p_1, \dots, p_m$  bilden ein  $H$ -Basis von  $\mathcal{A}$ .

iii.)  $p_1, \dots, p_m$  haben endlich viele reelle, einfache, gemeinsame Nullstellen  $y_i, i = 1, \dots, n$ .

Dann gibt es eine Kubaturformel vom Grad mindestens  $d$ , die die Nullstellen  $y_i$  als Knoten hat.

Damit zerfällt die Konstruktion von Kubaturformeln bzw. die Lösung des Gleichungssystems (1.1) in drei Teile. Eine kanonische Basis aus  $d$ -orthogonalen Polynomen wird ermittelt und danach deren gemeinsame Nullstellen bestimmt. Die Gewichte ergeben sich zuletzt als die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Die Konstruktion mit Satz 1.10 führt nicht immer zum Erfolg: Hat man eine  $H$ -Basis gefunden, so können die gemeinsamen Nullstellen komplex oder mehrfach sein. Auch negative Gewichte sind unerwünscht. Dazu ist nur ein unpraktisches Kriterium von Schmid ([61] Satz 2) bekannt. Die Vorzeichen der Gewichte kennt man nur in Spezialfällen (siehe Cools und Haegemans [10] für  $G$ -invariante Formeln, Morrow und Patterson [50] S. 955f, Mysovskikh [52] und Schmid [59] für Formeln vom Grad  $2\nu$  mit minimaler Knotenzahl). In dieser Arbeit wird auf die Positivität der Gewichte nicht weiter eingegangen.

Viele Autoren haben die gemeinsamen Nullstellen von  $d$ -orthogonalen Polynomen zur Konstruktion benutzt z.B.: Franke [27], [28], Haegemans und Piessens [34], [35], Haegemans [36], Schmid [59], [62], [63], und Stroud [68]. Dabei wurde teilweise die Symmetrie des Integrals ausgenutzt (siehe Kapitel 3).

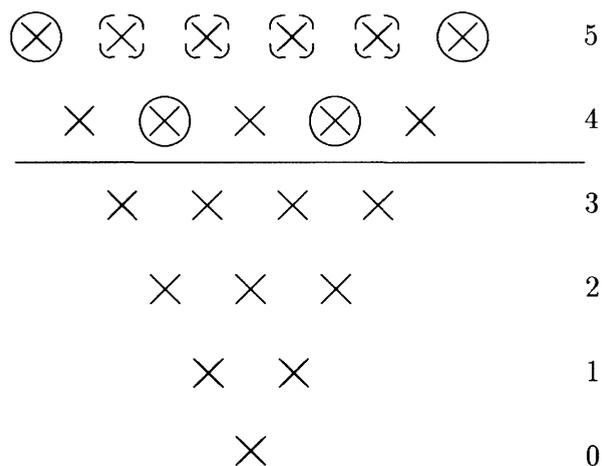
Bild 1.2 veranschaulicht ein Ideal, das zur Kubaturformel vom Grad 7 mit 13 Knoten aus Beispiel 1.1 gehört. Die Kreuze symbolisieren den Ring  $\mathbb{R}[x, y]$ . Die Anzahl der Kreuze in der Zeile  $k$  ist gleich  $\dim \mathbb{P}_k - \dim \mathbb{P}_{k-1}$ . Die Umrahmungen der Kreuze veranschaulichen das zugehörige Ideal. Die Anzahl der umrandeten Kreuze in Zeile  $k$  gibt die Anzahl

$$\dim \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_k - \dim \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_{k-1}$$

an. Hier gilt  $\dim \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_4 - \dim \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_3 = 2$  und  $\dim \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_5 - \dim \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_4 = 6$ . Es gibt also ein Fundamentalsystem vom Grad 5. Das sieht man daran, daß in Zeile 5 alle Kreuze umrandet sind.

Ganze Kreise stehen für Polynome aus der kanonischen Basis. In diesem Beispiel bilden also 4 Polynome vom Grad 4 und 5 die kanonische Basis.

Die Gerade symbolisiert die untere Schranke nach Stroud (siehe Satz 1.6), weil kein Polynom vom Grad 3 oder kleiner in den Knoten einer Kubaturformel vom Grad 7 verschwinden kann. Es gilt also  $H(3, \mathcal{A}) = \dim \mathbb{P}_3 = 10$ . Da

Abbildung 1.2: Ideal zu  $C_2 : 7 - 3$ 

für die Knotenanzahl  $n \geq H(3, \mathcal{A})$  gilt, gibt es mehr Knoten in einer Formel vom Grad 7 als es Kreuze unterhalb der Geraden gibt.

Die Anzahl der nicht umrandeten Kreuze ist gleich der Anzahl der Nullstellen von  $\mathcal{A}$ .

Mit Hilfe des folgenden Satzes ist es in Spezialfällen einfach zu entscheiden, ob Polynome eine kanonische Basis bilden.

**Satz 1.11** (Max Noether, siehe Stroud [69] S. 21, Möller [49]): Haben  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x, y]$  vom Grad  $\mu_1, \mu_2$  endlich viele paarweise verschiedene, gemeinsame, affine Nullstellen  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, \mu_1 \cdot \mu_2$  und verschwindet auch  $P$  vom Grad  $\mu$  in diesen Nullstellen, so gibt es  $q_1 \in \mathbb{P}_{\mu-\mu_1}$  und  $q_2 \in \mathbb{P}_{\mu-\mu_2}$  mit

$$P = q_1 p_1 + q_2 p_2.$$

Die gemeinsamen Nullstellen von zwei linear unabhängigen  $(2\nu - 1)$ -orthogonalen Polynomen vom Grad  $\nu$  in 2 Variablen eignen sich also als die  $n = \nu^2$  Knoten einer Kubaturformel vom Grad  $(2\nu - 1)$ , falls die Nullstellen reell und verschieden sind. So haben Cools und Haegemans [7], Cristescu und Loubignac [19], Franke [26] und Mysovskikh [53], [54] Formeln konstruiert. Es

gibt aber für zweidimensionale Integrale Kubaturformeln vom Grad  $(2\nu - 1)$  mit wesentlich weniger als  $\nu^2$  Knoten. Für deren Konstruktion mit Satz 1.10 benötigt man mehr als 2 Polynome in der H-Basis und Satz 1.11 ist nicht anwendbar.

Kennt man die gemeinsamen Nullstellen von  $p_1, \dots, p_m$ , so kann man oft ablesen, ob diese Polynome eine kanonische Basis bilden.

**Satz 1.12 :** *Seien  $p_1, \dots, p_m$  linear unabhängige Polynome vom Grad  $s$  in 2 Variablen und sei durch  $xp_j, yp_j, j = 1, \dots, m$  ein Fundamentalsystem vom Grad  $s + 1$  gegeben. Sei vorausgesetzt, daß die homogenen Anteile von  $p_1, \dots, p_m$  vom Grad  $s$  einen Raum der Dimension  $m$  aufspannen. Die Polynome  $p_1, \dots, p_m$  bilden genau dann eine H-Basis des Ideals  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$ , wenn  $p_1, \dots, p_m$  genau  $n = \dim \mathbb{P}_s - m$  gemeinsame, affine Nullstellen (mit Vielfachheit gerechnet) haben.*

BEWEIS: Da  $xp_j, yp_j$  ein Fundamentalsystem vom Grad  $s + 1$  bilden, gilt für die Hilbertfunktion  $H(s, \mathcal{A}) = H(s + 1, \mathcal{A}) = H(k, \mathcal{A}) \quad \forall k \geq s$ . Deshalb gilt für die Anzahl der Nullstellen  $n = H(s, \mathcal{A})$ . Nach Definition der Hilbertfunktion gilt  $H(s, \mathcal{A}) = \dim \mathbb{P}_s - \dim \mathbb{P}_s \cap \mathcal{A}$  und damit  $H(s, \mathcal{A}) \leq \dim \mathbb{P}_s - m$ . Angenommen  $p_1, \dots, p_m$  bilden keine kanonische Basis. Dann gibt es ein  $p = \sum_{j=1}^m q_j p_j$  mit  $\text{Grad}(q_j p_j) > \text{Grad}(p)$  für mindestens ein  $j$ , aber keine Darstellung  $p = \sum_{j=1}^m f_j p_j$  mit  $\text{Grad}(f_j p_j) \leq \text{Grad}(p)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Dieses  $p$  kann vom Grad  $\leq s$  angenommen werden, da es ein Fundamentalsystem vom Grad  $s + 1$  gibt, also alle Monome vom Grad  $\geq s + 1$  erzeugt werden. Da  $p$  die Bedingung für die kanonische Basis verletzt und die homogenen Anteile von  $p_1, \dots, p_m$  vom Grad  $s$  einen Raum der Dimension  $m$  erzeugen, sind  $p, p_1, \dots, p_m$  linear unabhängig. Aus  $\dim \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_s \geq m + 1$  folgt  $n = H(s, \mathcal{A}) \leq \dim \mathbb{P}_s - m - 1$ . Genau dann wenn  $p_1, \dots, p_m$  eine kanonische Basis bilden, gibt es kein solches  $p$  und die Nullstellenanzahl ist genau  $n = \dim \mathbb{P}_s - m$ . ■

Beim Konstruktionsweg nach Satz 1.10 bleibt ungeklärt, wie man eine kanonische Basis aus  $d$ -orthogonalen Polynomen findet. Eine Grundidee, die im folgenden häufig benutzt wird, besteht darin, einen Ansatz aus  $d$ -orthogonalen Polynomen zu machen, die von Parametern abhängen. Damit diese Polynome (eventuell mit anderen  $d$ -orthogonalen zusammen) eine kanonische Basis bilden, wird die Existenz von Syzygien bzw. dazu äquivalenten Gleichungen gefordert, was auf nichtlineare Gleichungen für die Parameter führt.

Die **T-Methode** und die **S-Methode** lassen sich in dieses Konzept einordnen. Mit der T-Methode (Morrow und Patterson [50], Münzel und Renner [51]

und Schmid [60], [61] ) werden Formeln vom Grad  $d = 2\nu - 1$  für zweidimensionale,  $Z_2$ -invariante Produktintegrale (z.B.  $C_2, E_2^r$ ) konstruiert. Es wird mit einem Fundamentalsystem  $R_j$  vom Grad  $\nu + 1$  mit  $(2\nu - 1)$ -orthogonalen Polynomen angesetzt:

$$R_j = P^{\nu+1-j,j} + \sum_{i=0}^{\nu-1} a_{ij} P^{\nu-1-i,i}, \quad j = 0, \dots, \nu + 1. \quad (1.4)$$

Dabei sind die  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  die unbekanntenen Parameter. Die orthogonalen Polynome  $P^{\nu-i,i}$  vom Grad  $\nu$  treten nicht auf, damit die  $R_j$  ein  $Z_2$ -invariantes Ideal mit einer  $Z_2$ -invarianten Nullstellenmenge erzeugen (siehe Paragraph 3.2). Die Polynome

$$Q_j := xR_j - yR_{j-1} \in \mathbb{P}_\nu, \quad j = 1, \dots, \nu + 1$$

haben den Grad  $\nu$ . Ein Teil der Parameter wird so bestimmt, daß die Polynome  $Q_j$  orthogonal sind. Dann kann man versuchen, die restlichen Parameter so zu bestimmen, daß die  $Q_j$  und  $R_j$  zusammen eine H-Basis bilden. Dazu muß

$$xQ_j, yQ_j \in \text{span}(R_0, \dots, R_{\nu+1}) \quad \text{für } j = 1, \dots, \nu + 1$$

erfüllt sein, da es sonst wegen  $Q_j = \sum_{i=0}^{\nu} b_{ji} P^{\nu-i,i}$  Polynome

$$\begin{aligned} T_j^1(x, y) &:= xQ_j(x, y) - \sum_{i=0}^{\nu} b_{ji} R_i(x, y) \neq 0 \quad \text{und} \\ T_j^2(x, y) &:= yQ_j(x, y) - \sum_{i=0}^{\nu} b_{ji} R_{i+1}(x, y) \neq 0 \end{aligned}$$

vom Grad  $\leq \nu - 1$  im Ideal  $\mathcal{A} = (Q_1, \dots, R_{\nu+1})$  gibt. Existiert ein  $T_j^k \in \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_{\nu-1}$  mit  $T_j^k \neq 0$ , so bilden die Polynome  $Q_1, \dots, Q_{\nu+1}, R_0, \dots, R_{\nu+1}$  keine H-Basis. Hat man die Parameter  $b_{ij}$  in Abhängigkeit der Parameter  $a_{ij}$  so bestimmt, daß

$$T_j^k \in \mathbb{P}_{\nu-1}, \quad k = 1, 2, j = 1, \dots, \nu + 1$$

gilt, so ergeben sich aus  $T_j^k = 0$  nichtlineare Gleichungen für die Parameter  $a_{ij}$ . Die Bedingungen  $xQ_j, yQ_j \in \text{span}(R_0, \dots, R_{\nu+1})$  sind also äquivalent zur Existenz von Syzygien

$$xQ_j - \sum_{i=0}^{\nu} b_{ji} R_i = 0, \quad yQ_j - \sum_{i=0}^{\nu} b_{ji} R_{i+1} = 0, \quad j = 1, \dots, \nu + 1.$$

Nach Möller [49] S. 187f sind diese notwendigen Bedingungen schon hinreichend dafür, daß die Polynome  $Q_1, \dots, Q_{\nu+1}, R_0, \dots, R_{\nu+1}$  eine H-Basis bilden. Sind die gemeinsamen Nullstellen außerdem reell und einfach, so sind die Voraussetzungen von Satz 1.10 für die Existenz einer Kubaturformel vom Grad  $2\nu - 1$  erfüllt.

In der S-Methode (Cools und Haegemans [8], [13] ) werden zwei Ansätze  $\{R_0, R_2, \dots\}$  oder  $\{R_1, R_3, R_5, \dots\}$  mit  $R_j$  aus (1.4) betrachtet, wobei das Integral als *Sya*-invariant vorausgesetzt wird und ein Teil der Parameter  $a_{ij}$  so festgelegt wird, daß  $R_0, R_2, \dots$  bzw.  $R_1, R_3, \dots$  einen *Sya*-invarianten Vektorraum aufspannen. Es werden zu Syzygien äquivalente Forderungen

$$\begin{aligned} x^2 R_i - y^2 R_{i-2} &\in \text{span}(R_0, R_2, \dots) \quad , i = 2, 4 \dots \quad \text{bzw.} \\ x^2 R_{i+1} - y^2 R_{i-1} &\in \text{span}(R_1, R_3, \dots) \quad , i = 2, 4 \dots \end{aligned}$$

aufgestellt, was auch auf nichtlineare Gleichungen für die Parameter führt.

In beiden Verfahren werden weitere Voraussetzungen an die Symmetrie des Integrals und des Ansatzes gemacht, um Rechnungen praktisch durchführen zu können.

### 1.3 Kubaturformeln vom Grad $2\nu - 1$ mit minimaler Knotenzahl

In diesem Abschnitt wird eine untere Schranke für die Knotenanzahl für Kubaturformeln mit ungeradem Grad für zweidimensionale Integrale angegeben. Daraus ergibt sich ein Konstruktionsverfahren (siehe Möller [47], [48] und Engels [24]).

Gesucht sind also die Knoten  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$  und Gewichte  $A_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ , einer Kubaturformel vom Grad  $2\nu - 1$  für ein Integral

$$I(f) = \iint_{\Omega} w(x, y) f(x, y) dx dy, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

so daß die Knotenzahl  $n$  möglichst klein ist.

Zur Motivation folgende Überlegungen: Wegen der unteren Schranke nach Satz 1.6 und Satz 1.10 liegt es nahe, die Knoten als die gemeinsamen Nullstellen von linear unabhängigen orthogonalen Polynomen  $p_1, \dots, p_m \in K_\nu$  vom

Grad  $\nu$  zu wählen, wobei  $p_1, \dots, p_m$  eine  $H$ -Basis bilden. Für  $m = \dim K_\nu$  ergeben sich aber im allgemeinen keine oder nur eine gemeinsame Nullstelle. Nach Satz 1.12 bilden dann  $p_1, \dots, p_m$  keine  $H$ -Basis. Also gilt  $m < \dim K_\nu$ . Der Test auf  $H$ -Basis (siehe Definition 1.8) beinhaltet u.a. die Überprüfung von allen gleichen Darstellungen eines Polynoms  $p$  vom Typ

$$p = \sum_{j=1}^m q_j p_j = \sum_{j=1}^m a_j p_j, \quad (1.5)$$

wobei  $q_j \in \mathbb{P}_1, a_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, m$  gilt und  $q_j p_j$  für mindestens ein  $j$  vom Grad  $\nu + 1$  ist.

Sei  $E := \text{span}(p_1, \dots, p_m)$ . Die Gleichungen aus (1.5) zu untersuchen, ist äquivalent damit, ob für alle  $(Q_1, Q_2) \in E^2$  mit  $Q_0 := xQ_1 + yQ_2 \in \mathbb{P}_\nu$  auch  $Q_0 \in E$  gilt. Bilden  $p_1, \dots, p_m$  eine kanonische Basis eines Ideals, das zu einer Kubaturformel vom Grad  $2\nu - 1$  gehört, so gilt  $E \subseteq K_\nu$ . Wegen  $Q_0 \in E \subseteq K_\nu$  sind also Gleichungen

$$xQ_1 + yQ_2 = Q_0 \quad \text{mit} \quad Q_0, Q_1, Q_2 \in K_\nu$$

zu untersuchen, was nur von  $\nu$  und dem Integral abhängt.

Definiere

$$\begin{aligned} M &:= \{(Q_0, Q_1, Q_2) \in \mathbb{P}_\nu \times K_\nu^2 \mid xQ_1 + yQ_2 = Q_0\}, \\ L &:= \{(Q_0, Q_1, Q_2) \in K_\nu^3 \mid xQ_1 + yQ_2 = Q_0\}. \end{aligned}$$

Es gilt  $\dim M = \nu$ , da  $(Q_0^j, Q_1^j, Q_2^j), j = 1, \dots, \nu$  mit

$$Q_1^j = P^{\nu-j,j}, \quad Q_2^j = -P^{\nu-j+1,j-1} \quad \text{und} \quad Q_0^j = xP^{\nu-j,j} - yP^{\nu-j+1,j-1}$$

eine Basis von  $M$  bilden. Sei  $W$  ein direktes Komplement von  $L$  in  $M$  ( $M = L \oplus W$ ) und  $\gamma$  die Dimension von  $W$ .

**Satz 1.13** (Möller [48] S. 224): Eine Kubaturformel vom Grad  $2\nu - 1$  hat  $n \geq \dim \mathbb{P}_{\nu-1} + \frac{\gamma}{2}$  Knoten.

BEWEIS: Sei  $\mathcal{A}$  das zugehörige Ideal und  $E := \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_\nu$  mit  $m := \dim E$ . Aus Satz 1.3 folgt  $E \subseteq K_\nu$ . Sei  $A_\nu$  ein direktes Komplement von  $E$  in  $K_\nu$ . Für  $p_1, p_2 \in E$  mit  $p_0 := xp_1 + yp_2 \in \mathbb{P}_\nu$  gilt  $p_0 \in E \subseteq K_\nu$ , also  $(p_0, p_1, p_2) \in L$ . Für  $(Q_0, Q_1, Q_2) \in W$  gilt also  $Q_1 \notin E$  oder  $Q_2 \notin E$ . Deshalb gilt

$$\dim W + \dim E^2 = \gamma + 2m \leq \dim K_\nu^2 = 2(\nu + 1).$$

Daraus folgt

$$\dim A_\nu = \dim K_\nu - m = \nu + 1 - m \geq \frac{\gamma}{2},$$

woraus sich mit  $n \geq H(\nu, \mathcal{A}) = \dim \mathbb{P}_{\nu-1} + \dim A_\nu$  die Behauptung ergibt. ■

Kubaturformeln, deren Knotenzahl gleich der unteren Schranke aus Satz 1.13 ist, werden Kubaturformeln mit minimaler Knotenzahl genannt. Ideale, die zu Kubaturformeln mit minimaler Knotenzahl gehören, besitzen ein Fundamentalsystem vom Grad  $\nu + 1$ . Denn aus  $n \geq H(\nu + 1, \mathcal{A}) \geq H(\nu, \mathcal{A}) + 1$  folgt nach obigem Beweis  $n \geq \dim \mathbb{P}_{\nu-1} + \frac{\gamma}{2} + 1$ .

Möller [47] S. 187 zeigt, daß für  $Z_2$ -invariante Integrale und für Produktintegrale wie z.B.  $C_2$  und  $E_2^{r^2}$  sowie für  $T_2$  und  $\nu \leq 6$

$$\gamma = 2 \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \quad \text{gilt.} \quad (1.6)$$

Ein Konstruktionsverfahren für Kubaturformeln mit minimaler Knotenzahl ergibt sich aus folgendem Satz.

**Satz 1.14** (Möller [47] S. 190): Seien  $p_1, \dots, p_m \in K_\nu$  linear unabhängige Polynome mit  $m = \nu + 1 - \frac{\gamma}{2}$  und  $E := \text{span}(p_1, \dots, p_m)$ . Sei  $\mathcal{A} := (p_1, \dots, p_m)$  das erzeugte Ideal. Es gelte:

i.)  $\mathcal{A}$  enthält ein Fundamentalsystem vom Grad  $\nu + 1$ .

ii.) Für  $(Q_0, Q_1, Q_2) \in L$  gilt  $Q_0, Q_1, Q_2 \in E$ .

iii.) Es gilt

$$\begin{aligned} \dim\{(R_1, \dots, R_6) \in E^6 \mid x^2 R_1 + xy R_2 + y^2 R_3 = x R_4 + y R_5 + R_6\} \\ = 2\nu - \frac{3\gamma}{2} + \dim L. \end{aligned}$$

Gelten i.), ii.) und iii.), so hat  $\mathcal{A}$  damit  $n = \dim \mathbb{P}_{\nu-1} + \frac{\gamma}{2} = \binom{\nu+1}{2} + \frac{\gamma}{2}$  viele affine Nullstellen. Sind sie reell und verschieden, so gibt es eine Kubaturformel vom Grad  $(2\nu - 1)$  mit den Nullstellen als Knoten.

BEWEIS: Wegen i.) gilt für die Nullstellenanzahl

$$n = H(\nu, \mathcal{A}) \leq \dim \mathbb{P}_\nu - m = \dim \mathbb{P}_{\nu-1} + \nu + 1 - m = \dim \mathbb{P}_{\nu-1} + \frac{\gamma}{2}.$$

Aus ii.) und iii.) folgt durch vollständige Induktion, daß  $p_1, \dots, p_m$  eine  $H$ -Basis von  $\mathcal{A}$  bilden. Daraus folgt  $H(\nu, \mathcal{A}) = \dim \mathbb{P}_\nu - m$ , also  $n = \dim \mathbb{P}_{\nu-1} + \frac{\gamma}{2}$ , die untere Schranke aus Satz 1.13. Da die orthogonalen Polynome  $p_1, \dots, p_m$  insbesondere  $(2\nu - 1)$ -orthogonal sind, folgt die Existenz der Kubaturformel mit Satz 1.10, falls die gemeinsamen Nullstellen reell und verschieden sind. ■

Mit Satz 1.14 konstruiert man Formeln, in dem man einen Raum  $E$  sucht, der die Bedingungen i.), ii.) und iii.) erfüllt.

Man berechnet  $L$  und

$$F := \{(R_1, \dots, R_6) \in K_\nu^6 \mid x^2 R_1 + xy R_2 + y^2 R_3 = x R_4 + y R_5 + R_6\},$$

wählt einen Unterraum  $F_1$  von  $F$  der Dimension  $2\nu - \frac{3\gamma}{2} + \dim L$  mit den Eigenschaften:

- Aus  $(Q_0, Q_1, Q_2) \in L$  folgt

$$\begin{aligned} (0, 0, 0, Q_1, Q_2, Q_0) &\in F_1 \\ (Q_1, Q_2, 0, Q_0, 0, 0) &\in F_1 \\ (0, Q_1, Q_2, 0, Q_0, 0) &\in F_1 \end{aligned} .$$

- Das erzeugte Ideal ist fundamental vom Grad  $\nu + 1$ .

- Die Komponenten  $R_1, \dots, R_6$  von  $F_1$  erzeugen einen Raum  $E$  der Dimension  $m = \nu + 1 - \frac{\gamma}{2}$ .

Dann werden die gemeinsamen Nullstellen berechnet. Falls sie reell und verschieden sind, ergeben sich die Gewichte durch ein lineares Gleichungssystem.

## 1.4 Gröbner-Basis: eine weitere Idealbasis

Eine Gröbner-Basis ist unter schwachen Voraussetzungen auch eine H-Basis. Deshalb konnte sie zum Beweis der Existenz von Kubaturformeln eingesetzt werden, die mit der T-Methode und der S-Methode konstruiert wurden: Möller [49] zeigte den Erfolg der T-Methode und in einem Spezialfall den Erfolg der S-Methode. Cools und Haegemans [13], [14] behandelten danach die restlichen Fälle der S-Methode.

Der Vorteil der Gröbner-Basis gegenüber der H-Basis besteht in der leichteren Überprüfbarkeit. Für eine H-Basis  $p_1, \dots, p_m$  muß gezeigt werden, daß jedes

$$p = \sum_{j=1}^m q_j p_j \text{ mit } \text{Grad}(p) < \text{Grad}(q_j p_j) \text{ für ein } j \in \{1, \dots, m\}$$

eine weitere Darstellung

$$p = \sum_{j=1}^m f_j p_j \text{ mit } \text{Grad}(f_j p_j) \leq \text{Grad}(p) \quad \forall j = 1, \dots, m$$

besitzt. Dabei bleibt unklar, auf welche  $p$  man sich beschränken kann. Die zweite Darstellung (also die  $f_j$ ) ist nicht einfach zu finden. Für Gröbner-Basen braucht man nur eine weitere Darstellung für die sogenannten S-Polynome zu finden, was sukzessive und automatisiert durchgeführt werden kann. Eine Einführung findet man in Buchberger [4], Melenk, Möller und Neun [45], Möller [49].

Eine Gröbner-Basis hängt von der **Ordnung** der Monome ab. Gebräuchlich sind die **lexikographische Ordnung**

$$x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N} <_{lex} x_1^{j_1} \dots x_N^{j_N} \iff (\exists k \leq N : i_k < j_k \wedge \forall l > k : i_l = j_l),$$

also zum Beispiel für  $x = x_1$  und  $y = x_2$ :

$$\begin{aligned} 1 <_{lex} x <_{lex} x^2 <_{lex} x^3 \dots <_{lex} y <_{lex} xy <_{lex} x^2y <_{lex} x^3y \dots \\ &<_{lex} y^2 <_{lex} xy^2 <_{lex} x^2y^2 <_{lex} \dots \\ &<_{lex} y^3 <_{lex} xy^3 <_{lex} x^2y^3 <_{lex} \dots, \end{aligned}$$

und die **lexikographische Ordnung mit Gradberücksichtigung**

$$\begin{aligned} x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N} <_g x_1^{j_1} \dots x_N^{j_N} \\ \iff \text{Grad}(\underline{x}^i) < \text{Grad}(\underline{x}^j) \quad \vee \quad (\text{Grad}(\underline{x}^i) = \text{Grad}(\underline{x}^j) \wedge \underline{x}^i <_{lex} \underline{x}^j), \end{aligned}$$

zum Beispiel

$$1 <_g x <_g y <_g x^2 <_g xy <_g y^2 <_g x^3 <_g x^2y <_g \dots$$

Es sind aber auch andere Ordnungen  $<_T$  zulässig. Sie müssen nur die Bedingungen

$$1 \leq_T \underline{x}^i \quad \text{und} \quad (\underline{x}^i <_T \underline{x}^j \implies \underline{x}^{i+k} <_T \underline{x}^{j+k})$$

erfüllen. Beispiele für Ordnungen, die von einer Gruppe abhängen, findet man in Paragraph 4.3.

**Definition 1.15 :** Das führende Monom  $lt(p)$  eines Polynoms

$$p(\underline{x}) = \sum_{i \in I} a_i \underline{x}^i, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

ist das Monom  $\underline{x}^j$  mit der höchsten Ordnung, das in der Darstellung von  $p$  durch Monome auftritt ( $a_j \neq 0$ ,  $\underline{x}^i >_T \underline{x}^j \quad \forall i \in I \setminus \{j\}$  mit  $a_i \neq 0$ ).

**Definition 1.16 :**  $G = \{p_1, \dots, p_m\} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$  bildet eine Gröbner-Basis bzgl.  $<_T$  des Ideals  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$ , wenn für alle  $p \in \mathcal{A}$  Polynome  $q_1, \dots, q_m$  existieren mit

$$p = \sum_{i=1}^m q_i p_i \quad \text{mit} \quad lt(q_i p_i) \leq_T lt(p) \quad \text{oder} \quad q_i = 0.$$

Für Gröbner-Basen bzgl. der lexikographischen Ordnung mit Gradberücksichtigung müssen also schärfere Bedingungen als für H-Basen erfüllt sein.

Eine Darstellung  $\sum_{i=1}^m q_i p_i$  für  $p$  findet man folgendermaßen: Man wählt ein  $p_i \in G$ , ein Monom  $\underline{x}^k$  mit  $lt(p) = lt(\underline{x}^k p_i)$  und eine Konstante  $a \in \mathbb{R}$ , so daß sich in  $g := p - a \underline{x}^k p_i$  das führende Monom  $lt(p)$  weghebt ( $lt(g) <_T lt(p)$ ). Das wiederholt man mit  $g$  und mit jedem weiteren entstehenden Polynom bis man 0 erhält. Das wird **Reduktion** genannt. Dafür wird speziell ein Symbol eingeführt.

**Definition 1.17 :**

Sei  $F = \{p_1, \dots, p_m\} \subset \mathbb{R}[\underline{x}] \setminus \{0\}$ . Man schreibt  $p \longrightarrow_F g$ , wenn es ein Polynom  $g$  und ein  $p_i \in F$  gibt mit

$$p = g + q p_i \quad \text{mit} \quad lt(g) <_T lt(p) \quad \text{oder} \quad g = 0.$$

Für  $p \rightarrow_F g_1 \rightarrow_F g_2 \rightarrow_F \dots \rightarrow_F g$  schreibt man

$$p \rightarrow_F^* g.$$

Gilt  $p \rightarrow_F^* 0$ , so gibt es also eine Darstellung

$$p = \sum_{i=1}^m q_i p_i \quad \text{mit} \quad lt(q_i p_i) \leq_T lt(p) \quad \text{oder} \quad q_i = 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Außerdem ist  $\rightarrow_F^*$  leicht programmierbar.

Sei  $H(p_i, p_j) = kgV(lt(p_i), lt(p_j))$  das kleinste gemeinsame Vielfache von  $lt(p_i)$  und  $lt(p_j)$ .

Der folgende Satz klärt, was für eine Gröbner-Basis gezeigt werden muß.

**Satz 1.18** (Möller [49] S. 184): Sei  $G = \{p_1, \dots, p_m\} \subset \mathbb{R}[\underline{x}] \setminus \{0\}$  mit  $p_i = a_i lt(p_i) + q_i$  mit  $lt(q_i) <_T lt(p_i)$  und  $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und sei  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$ . Dann sind äquivalent:

i.)  $\forall p \in \mathcal{A}$  gilt  $p \rightarrow_G^* 0$ .

ii.)  $G$  ist eine Gröbner-Basis bzgl.  $<_T$ .

iii.) Für alle  $(i, j)$  mit  $1 \leq i < j \leq m$  gilt

$$S(p_i, p_j) := \frac{H(p_i, p_j)}{a_i lt(p_i)} p_i - \frac{H(p_i, p_j)}{a_j lt(p_j)} p_j \rightarrow_G^* 0.$$

Es ist auch üblich für die Definition von Gröbner-Basen Bedingung i.) oder iii.) zu verwenden.

Die Polynome  $S(p_i, p_j)$  heißen **S-Polynome**. Die Indexpaare  $(i, j)$  heißen **kritische Paare**, weil  $S(p_i, p_j) \in \mathcal{A}$  und

$$lt(S(p_i, p_j)) <_T lt\left(\frac{H(p_i, p_j)}{a_k lt(p_k)} p_k\right) \quad k = i, j.$$

gilt und damit eine Darstellung

$$S(p_i, p_j) = \sum_{k=1}^m q_k p_k \quad \text{mit} \quad lt(q_k p_k) \leq_T lt(S(p_i, p_j)) \quad \text{für} \quad k = 1, \dots, m$$

nicht offensichtlich ist.

Der **Buchberger-Algorithmus** (siehe Möller [49]) berechnet aus einer gegebenen Basis  $F = \{p_1, \dots, p_m\}$  eines Ideals  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$  eine Gröbner-Basis. Man geht aus von  $G = \{p_1, \dots, p_m\}$  und der Menge  $D$  der kritischen Paare. Dann werden nach und nach alle S-Polynome soweit wie möglich reduziert. Gilt

$$S(p_i, p_j) \xrightarrow*_G 0 \quad \forall (i, j) \in D,$$

so hat man eine Gröbner-Basis gefunden. Ergibt sich für ein kritisches Paar  $(i, j)$

$$S(p_i, p_j) \xrightarrow*_G g \neq 0,$$

wobei sich  $g$  nicht weiter reduzieren läßt, so nimmt man  $g = p_{m+1}$  als weiteres Polynom in die Basis auf und erweitert die Menge der kritischen Paare  $D$  um  $(i, m+1)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Das wird solange wiederholt, bis man eine Gröbner-Basis gefunden hat.

Varianten dieses Algorithmus entfernen überflüssige Polynome aus der Basis und überprüfen Kriterien für kritische Paare  $(i, j)$ , bei deren Erfülltsein

$$S(p_i, p_j) \xrightarrow*_G 0$$

bekannt ist (siehe Gebauer und Möller [30] und Melenk, Möller und Neun [45]).

Statt mit  $\mathbb{R}$  als Koeffizientenbereich kann man auch mit ganzen Zahlen oder mit parameterabhängigen Koeffizienten rechnen. Statt des Reduktionsschrittes  $p \xrightarrow*_G g$ , wählt man einen geeigneten Koeffizienten  $a$  und reduziert  $ap$ .

Zur Lösung von nichtlinearen polynomialen Gleichungssystemen

$$q_i(\underline{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

kann der Buchberger-Algorithmus deshalb eingesetzt werden, weil die Lösungen des Gleichungssystems Nullstellen des Ideals  $\mathcal{A} = (q_1, \dots, q_m)$  sind. Wählt man die lexikographische Ordnung, ist die Gröbner-Basis in vielen Fällen eine Basis in oberer Dreiecksgestalt (ähnlich wie beim Gaußschen Algorithmus für lineare Gleichungssysteme):

$$\begin{aligned} p_N(x_1, \dots, x_N) &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ p_2(x_1, x_2) &= 0 \\ p_1(x_1) &= 0. \end{aligned}$$

Gröbner-Basen bzgl. der lexikographischen Ordnung mit Gradberücksichtigung haben den Vorteil, daß man an ihnen leicht die Hilbertfunktion und damit die Anzahl der Nullstellen ablesen kann.

Der Buchberger-Algorithmus steht unter REDUCE Version 3.3 unter dem Befehl Groebner für die lexikographische Ordnung mit und ohne Gradberücksichtigung zur Verfügung. Es kann u. a. mit parameterabhängigen Koeffizienten gerechnet werden. Die Ordnung der Variablen ist vorgebar. Ein Faktorisierer kann zugeschaltet werden, der die Polynome auf Faktoren untersucht. Dadurch wird die Bestimmung einer Gröbner-Basis von  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$  in kleinere Probleme zerlegt, was Groebner automatisch durchführt. Ist z.B.  $p_1 = Q_1 \cdot Q_2$  bekannt, so gilt  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$  mit  $\mathcal{A}_i = (Q_i, p_2, \dots, p_m), i = 1, 2$ . Die Menge der Nullstellen von  $\mathcal{A}$  ist die Vereinigung der Nullstellenmengen von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$ . Dann ist es also sinnvoll, Gröbner-Basen von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  zu berechnen.

Die Beispiele in den folgenden Kapiteln wurden in Reduce ([38], [58]) unter anderem mit Groebner gerechnet. Groebner wurde dazu benutzt, die Gleichungen für die Parameter zu lösen und die gemeinsamen Nullstellen der  $d$ -orthogonalen Polynome zu bestimmen.

Gröbner-Basen bzgl. der lexikographischen Ordnung mit Gradberücksichtigung sind H-Basen (Möller [49] S. 184). Deshalb ist folgender Konstruktionsweg für Kubaturformeln möglich (Möller [49]):

Sei  $G = \{p_1, \dots, p_m\}$  eine Menge von  $d$ -orthogonalen Polynomen  $p_i$ , die von Parametern abhängen und endlich viele gemeinsame Nullstellen haben. Man bilde

$$S(p_i, p_j) \longrightarrow_G^* q_{ij}$$

bzgl. der lexikographischen Ordnung mit Gradberücksichtigung. Die Polynome  $q_{ij}$  seien nicht weiter reduzierbar. Da sie von den Parametern abhängen, ergeben sich aus der Forderung  $q_{ij} = 0 \quad \forall(i, j)$  Gleichungen für die Parameter. Für jede Lösung dieser Parametergleichungen ist  $G$  eine H-Basis. Wenn die gemeinsamen Nullstellen reell und verschieden sind, ergibt sich nach Satz 1.10 eine Kubaturformel mit den Nullstellen als Knoten. Praktisch durchführbar ist dieser Weg nur, wenn wenige  $p_i$  von niedrigem Grad und wenige Parameter auftreten.

## Kapitel 2

# Überblick über die Theorie der linearen Darstellungen

In späteren Kapiteln dieser Arbeit sollen Kubaturformeln für Integrationsgebiete konstruiert werden, die eine gewisse Symmetrie besitzen, also unverändert unter einer Gruppe  $G$  von (affin) linearen Transformationen bleiben. Die Wirkung dieser Symmetrie auf Polynomräume kann mit Hilfe linearer Darstellungen beschrieben werden. Dadurch kann die Theorie dieser Darstellungen bei der Konstruktion von symmetrischen Kubaturformeln mit Hilfe von Polynomidealen erfolgreich eingesetzt werden.

In diesem Kapitel werden zunächst die wichtigsten Begriffe und Sätze aus der Theorie der linearen Darstellungen zusammengestellt und für die hier wichtigen Gruppen genauer präzisiert. Eine ausführliche Einführung mit zahlreichen Anwendungen geben E. Stiefel und A. Fässler [67], während die Theorie in J.-P. Serre (Part I) [64] kurz und übersichtlich behandelt wird.

### 2.1 Lineare Darstellungen

Gegeben sei eine Gruppe  $G$  mit endlicher Ordnung  $g$  und ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  der Dimension  $n$ . Eine **lineare Darstellung** von  $G$  auf  $V$  ist eine Abbildung  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  mit der Eigenschaft

$$\rho(s \cdot t) = \rho(s) \cdot \rho(t)$$

für alle  $s, t \in G$  (Serre S. 3 [64]). Dabei ist  $GL(V)$  die Gruppe der Isomorphismen  $R : V \rightarrow V$ .  $V$  heißt **Darstellungsraum** und  $n$  die **Dimension**

von  $\rho$  (Stiefel/Fässler S. 16 [67]). In späteren Kapiteln dieser Arbeit ist der Darstellungsraum meistens ein Polynomraum.

Das einfachste Beispiel einer linearen Darstellung ist

$$\rho : G \longrightarrow GL(V), \quad \rho(t) = id \quad \forall t \in G, \quad \text{mit} \quad \dim(V) = 1,$$

die **Einsdarstellung** (Stiefel/Fässler S. 16 [67]) oder **triviale Darstellung** (Serre S. 4 [64]) genannt wird.

Da der Darstellungsraum  $V$  endlichdimensional ist, können die linearen Transformationen  $\rho(t)$  bzgl. einer Basis als Matrizen  $D(t) \in \mathbb{C}^{n,n}, t \in G$  angegeben werden.

Es ist üblich, gewisse Darstellungen miteinander zu identifizieren. Zwei lineare Darstellungen  $\vartheta : G \longrightarrow GL(U)$  und  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  heißen **äquivalent** (Stiefel/Fässler S. 20 [67]) bzw. **isomorph** (Serre S. 4 [64]), wenn es einen Isomorphismus  $\tau : U \longrightarrow V$  gibt mit der Eigenschaft:

$$\tau \circ \vartheta(t) = \rho(t) \circ \tau \quad \forall t \in G.$$

Dann werden die Vektoren in  $V$  und  $U$  sozusagen gleich transformiert.

Ein Teilraum  $W \leq V$  heißt  **$G$ -invariant** (bzgl.  $\rho$ ), wenn  $\rho(t)(W) \subseteq W$  für alle  $t \in G$  gilt. Dann ist die Einschränkung

$$\rho^W : G \longrightarrow GL(W), \quad \rho^W(t) = \rho(t)|_W \quad \forall t \in G$$

der gegebenen linearen Darstellung  $\rho$  eine **Teildarstellung** (Serre S. 5 [64]).

**Satz 2.1** (Serre [64] S. 6) : Ist  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  eine lineare Darstellung und  $\rho^W : G \longrightarrow GL(W)$  eine Teildarstellung, so gibt es ein  $G$ -invariantes direktes Komplement  $W^0$  zu  $W$  in  $V$  und eine Teildarstellung  $\rho^{W^0} : G \longrightarrow GL(W^0)$  von  $\rho$ .

Man schreibt  $\rho = \rho^W + \rho^{W^0}$ .

**Beispiel 2.2** : Sei  $G$  eine Gruppe von affin linearen Transformationen des  $\mathbb{R}^N$ , die ein Integrationsgebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  invariant lassen. Durch  $\rho : G \longrightarrow GL(\mathbb{P}_d^N), \rho(t)(p(\underline{x})) := p(t(\underline{x})), t \in G$  ergibt sich dann eine lineare Darstellung auf dem Raum der Polynome vom Grad  $\leq d$  in  $N$  Variablen. Eine Teildarstellung ergibt sich z.B. auf dem Raum der  $G$ -invarianten Polynome ( $p(t(\underline{x})) = p(\underline{x}), \forall t \in G$ ). Das ist eine mehrfache Summe der Einsdarstellung. Über diese  $G$ -invarianten Polynome ergeben sich weitere Aussagen durch die Invariantentheorie (siehe Paragraph 4.1).

Ausführlichere Beispiele findet man in Paragraph 3.1.

## 2.2 Irreduzible Darstellungen, kanonische Zerlegung

Eine Hauptaussage der linearen Darstellungstheorie betrifft die Zerlegbarkeit einer Darstellung in Teildarstellungen. Dazu folgende Definition.

**Definition 2.3** (Serre S. 7 [64]) : Eine lineare Darstellung  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ , die keine echten Teildarstellungen hat, wenn also  $V$  außer  $\{0\}$  und  $V$  selbst keine  $G$ -invarianten Teilräume besitzt, heißt **irreduzibel**.

Für eine endliche Gruppe  $G$  gibt es bis auf Isomorphie nur wenige irreduzible Darstellungen (Stiefel/Fässler S. 26 [67]). Diese sind für die wichtigsten Gruppen bekannt (z.B. Serre S. 35-43 [64]). In Paragraph 2.6 werden sie für Gruppen, die bei der Konstruktion von Kubaturformeln auftreten, aufgelistet.

Aus Satz 2.1 folgt:

**Satz 2.4** (Serre S. 7 [64]): Jede lineare Darstellung einer endlichen Gruppe  $G$  auf einem endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  ist die direkte Summe von irreduziblen Darstellungen.

Sei  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  eine lineare Darstellung. Die Gruppe  $G$  habe die paarweise inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen

$$\rho^i : G \rightarrow GL(W_i) \quad i = 1, \dots, h$$

mit Dimension  $n_i \in \mathbb{N}$ .

Nach Satz 2.4 gibt es eine Zerlegung von  $\rho$  :

$$\rho = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^{c_i} \rho_j^i,$$

$$V = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^{c_i} V_j^i,$$

wobei die irreduziblen Darstellungen

$$\rho_j^i : G \rightarrow GL(V_j^i), \quad j = 1, \dots, c_i, \quad c_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

äquivalent zu  $\rho^i : G \longrightarrow GL(W_i)$  sind. Diese Zerlegung ist im allgemeinen nicht eindeutig. Aber unabhängig von der gewählten Zerlegung in irreduzible Darstellungen erhält man folgende **kanonische Zerlegung**, die eindeutig ist (Serre S. 21 [64]):

$$V = \sum_{i=1}^h V_i \quad \text{mit} \quad V_i = \sum_{j=1}^{c_i} V_j^i.$$

Die Räume  $V_i$  der Dimension  $n_i c_i$  heißen **Konglomerate** (Stiefel/Fässler [67] S. 40) und die Anzahlen  $c_i$  äquivalenter, irreduzibler Darstellungen **Vielfachheiten** (Stiefel/Fässler [67] S. 39). Man sagt, die Elemente von  $V_i$  haben die Symmetrie der Darstellung  $\rho^i$ .

Die lineare Darstellung  $\rho$  hat also die **volle Ausreduktion** (Stiefel/Fässler [67] S. 39)

$$\rho = c_1 \rho^1 + \dots + c_h \rho^h.$$

## 2.3 Charakter einer linearen Darstellung

In den Anwendungen sind häufig für eine gegebene lineare Darstellung  $\rho$  die Vielfachheiten  $c_i$  und die Konglomerate  $V_i$  und deren weitere Zerlegung in irreduzible Teilräume  $V_j^i$  zu berechnen. Für die ersten beiden Aufgaben hat der folgende Begriff eine zentrale Bedeutung.

**Definition 2.5** : Sei  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  eine lineare Darstellung mit Darstellungsmatrizen  $D(t), t \in G$ . Die Abbildung

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}, \chi(t) := \text{Spur}(D(t))$$

heißt der zu  $\rho$  gehörige **Charakter** (Serre [64] S. 10).

Da die Spur unabhängig von der gewählten Basis ist, ist der Charakter unabhängig von dem gewählten Satz an Darstellungsmatrizen. Zwei Darstellungen einer endlichen Gruppe sind genau dann äquivalent, wenn sie denselben Charakter haben (Serre [64] S. 16).

Sind  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  und  $\vartheta : G \longrightarrow GL(W)$  zwei lineare Darstellungen mit zugehörigen Charakteren  $\chi$  und  $\psi$ , so hat die Darstellung  $\rho + \vartheta : G \longrightarrow GL(V \oplus W)$ ,  $(\rho + \vartheta)(t)(v + w) := \rho(t)(v) + \vartheta(t)(w)$  den Charakter  $\chi + \psi$  (Serre [64] S. 11).

Zwei Gruppenelemente  $r, s \in G$  heißen zueinander **ähnlich**, wenn  $t \in G$  existiert mit  $r = t \cdot s \cdot t^{-1}$  (Serre [64] S. 19).

Durch diese Äquivalenzrelation zerfällt die Gruppe in **Ähnlichkeitsklassen**. Charaktere haben auf Ähnlichkeitsklassen den gleichen Wert ( $\chi(s) = \chi(tst^{-1})$ ).

Allgemein heißen Funktionen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , die diese Eigenschaft haben, **Klassenfunktionen** (Serre [64] S. 18). Auf dem Raum der Klassenfunktionen kann ein Skalarprodukt folgendermaßen eingeführt werden:

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} f_1(t) \cdot \overline{f_2(t)} \quad (\text{Serre [64] S. 15}).$$

Seien  $\rho^i : G \rightarrow GL(W_i)$ ,  $i = 1, \dots, h$  die paarweise inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen von  $G$  und  $\chi^i, i = 1, \dots, h$  die zugehörigen Charaktere.

**Satz 2.6** (Serre S. 19 [64]): Die Charaktere  $\chi^i, i = 1, \dots, h$  der irreduziblen Darstellungen bilden eine Orthonormalbasis des Raumes der Klassenfunktionen.

Damit ist die Anzahl  $h$  der inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen gleich der Anzahl der Äquivalenzklassen.

Hat  $\rho$  die volle Ausreduktion

$$\rho = c_1 \rho^1 + c_2 \rho^2 + \dots + c_h \rho^h,$$

so gilt für den zugehörigen Charakter

$$\chi = c_1 \chi^1 + c_2 \chi^2 + \dots + c_h \chi^h.$$

Am Charakter kann man also die volle Ausreduktion ablesen. Die Vielfachheiten  $c_i$  lassen sich mit dem folgenden Satz einfach berechnen.

**Satz 2.7** (Stiefel/Fässler S. 140 [67]):

$$c_i = (\chi, \chi^i) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \chi(t) \overline{\chi^i(t)}, \quad i = 1, \dots, h.$$

Die Charaktere der irreduziblen Darstellungen werden für einige Gruppen in Paragraph 2.6 angegeben.

## 2.4 Konkrete Berechnung der Konglomerate

Eine der Hauptaufgaben ist die Berechnung der Konglomerate  $V_i$ . Das ist mit Hilfe von Projektionen möglich.

**Satz 2.8** (Stiefel/Fässler [67] S. 143): Sei  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  eine lineare Darstellung einer endlichen Gruppe  $G$  der Ordnung  $g$ . Sei  $\rho = c_1\rho^1 + \dots + c_h\rho^h$  die volle Ausreduktion, seien  $\chi^i$  die zu  $\rho^i, i = 1, \dots, h$  gehörigen Charaktere und sei  $V = V_1 + \dots + V_h$  die Zerlegung in die Konglomerate  $V_i$ , die die Dimension  $c_i n_i$  haben. Dann sind durch

$$\Pi^i := \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \overline{\chi^i(t)} \rho(t), \quad i = 1, \dots, h,$$

Projektionen von  $V$  auf  $V_i$  gegeben.

Benötigt man außer dem Konglomerat  $V_i$  auch alle weitergehenden Zerlegungen in  $G$ -invariante Teilräume, so muß nur für den Fall  $n_i \geq 2$  eine spezielle Basis von  $V_i$  berechnet werden. Für  $n_i = 1$  ist jede Linearkombination von  $v_i^j$  eine Basis eines  $G$ -invarianten, eindimensionalen Raumes, wenn  $v_i^j, j = 1, \dots, c_i$  eine Basis von  $V_i$  bezeichnet. Man beachte, daß nur bei der trivialen Darstellung die Vektoren  $v_i^j$  selbst unverändert bleiben.

Für eine irreduzible Darstellung  $\rho^i : G \rightarrow GL(W_i)$  der Dimension  $n_i > 1$  wird für die weitere Zerlegung des Konglomerats  $V_i$  in  $G$ -invariante Teilräume ein Satz von Darstellungsmatrizen  $D(t), t \in G$  (zugehörig zu  $\rho^i$ ) benötigt. Für wichtige Gruppen liegen Darstellungsmatrizen der irreduziblen Darstellungen vor (siehe Serre [64] S. 35-38, Stiefel/Fässler [67] S. 118f).

Eine **symmetriegerechte Basis** (Stiefel/Fässler [67] S. 43) des Konglomerates  $V_i$  der Dimension  $n_i c_i$  zugehörig zur irreduziblen Darstellung  $\rho^i$ , ist eine Basis

$$\begin{array}{ccccccc} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 & \dots & v_{n_i}^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & \dots & v_{n_i}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_1^{c_i} & v_2^{c_i} & v_3^{c_i} & \dots & v_{n_i}^{c_i} \end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß jede Zeile  $k$  einen  $G$ -invarianten Raum aufspannt, der bzgl. der Basis  $v_1^k, \dots, v_{n_i}^k$  nach den Matrizen  $D(t), t \in G$  transformiert wird. Die lineare Darstellung

$$c_i \cdot \rho^i : G \longrightarrow GL(V_i), \quad c_i \rho^i(t) := \rho|_{V_i}(t)$$

hat also bzgl. der Basis  $v_1^1, v_2^1, \dots, v_{n_1}^1, v_1^2, \dots, v_{n_i}^{c_i}$  die Darstellungsmatrizen

$$\left( \begin{array}{cccc} \boxed{D(t)} & & & 0 \\ & \boxed{D(t)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{D(t)} \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c} \boxed{D(t)} \\ \boxed{D(t)} \\ \ddots \\ \boxed{D(t)} \end{array}} \right\} c_i \text{ Kästchen}$$

Diese symmetriegerechte Basis kann ebenfalls mittels Projektionen berechnet werden (Serre [64] S. 23f, Stiefel/Fässler [67] S. 100-111). Sei

$$\pi_{k,l} := \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} r_{l,k}(t^{-1}) \rho(t), \quad k, l = 1, \dots, n_i, \quad (2.1)$$

wobei die Darstellungsmatrizen durch  $D(t) = (r_{k,l}(t))_{k,l=1,\dots,n_i}$ ,  $t \in G$  gegeben sind. Die symmetriegerechte Basis wird spaltenweise zusammengefaßt:

$$V_{i,1} := \text{span}(v_1^1, v_1^2, v_1^3, \dots, v_1^{c_i}), \dots, V_{i,n_i} := \text{span}(v_{n_i}^1, v_{n_i}^2, v_{n_i}^3, \dots, v_{n_i}^{c_i}).$$

**Satz 2.9** (Serre S. 23 [64]):

- i.)  $\pi_{k,k}$  ist eine Projektion von  $V$  auf  $V_{i,k}$  für  $k = 1, \dots, n_i$ .  
Es gilt

$$\Pi^i = \sum_{k=1}^{n_i} \pi_{k,k}.$$

- ii.)  $\pi_{k,l}$  ist eine Abbildung von  $V$  auf  $V_{i,k}$ .  $\pi_{k,l}|_{V_{i,l}}$  ist ein Isomorphismus von  $V_{i,l}$  auf  $V_{i,k}$ .

Um eine symmetriegerechte Basis von  $V_i$  zu finden, kann man also folgendermaßen vorgehen (Stiefel/Fässler [67] S. 108f). Man ermittelt mit Hilfe von  $\pi_{1,1}$  eine Basis  $v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^{c_i}$  von  $V_{i,1}$ . Durch  $\pi_{2,1}$  erhält man dann

$$v_2^j := \pi_{2,1}(v_1^j), \quad j = 1, \dots, c_i.$$

Analog ergibt sich

$$v_l^j := \pi_{l,1}(v_1^j), \quad l = 3, \dots, n_i, \quad j = 1, \dots, c_i.$$

Für jede andere Wahl einer Basis von  $V_{i,1}$  ergibt sich eine andere **explizite Zerlegung** des Konglomerates  $V_i$  in  $G$ -invariante Räume der Dimension  $n_i$ . Das sind alle Möglichkeiten, da sich ein  $n_i$ -dimensionaler,  $G$ -invarianter Unterraum von  $V_i$  bzgl. einer geeignet gewählten Basis sich nach den Matrizen  $D(t), t \in G$  transformiert.

## 2.5 Kronecker-Produkte von linearen Darstellungen

Bei der Konstruktion von Kubaturformeln treten lineare Darstellungen  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  auf, wobei die Elemente von  $V$  Polynome sind. Bei der bisher in diesem Kapitel zusammengefaßten Theorie wird nur die Vektorraumstruktur von  $V$  benutzt. Bei der Multiplikation hingegen wirkt die Symmetrie ähnlich wie das Kronecker-Produkt. Dieser entscheidende Sachverhalt wird in Paragraph 3.3 untersucht.

Seien  $\rho : G \rightarrow GL(V), \vartheta : G \rightarrow GL(W)$  zwei lineare Darstellungen und sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  bzw.  $w_1, \dots, w_m$  eine Basis von  $W$ . Das Tensorprodukt  $V \times W$  hat dann die Basis  $v_i \otimes w_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ .

**Definition 2.10** (Serre [64] S. 8) : Das **Kronecker-Produkt** oder **Tensorprodukt**  $\rho \times \vartheta : G \rightarrow GL(V \times W)$  ist durch die Isomorphismen

$$(\rho \times \vartheta)(t) : V \times W \rightarrow V \times W, \quad (\rho \times \vartheta)(t)(v \otimes w) = \rho(t)(v) \otimes \vartheta(t)(w)$$

definiert.

Sind  $\chi$  und  $\psi$  die zu  $\rho$  und  $\vartheta$  gehörenden Charaktere, so hat  $\rho \times \vartheta$  den Charakter  $\chi \cdot \psi$  (Serre [64] S. 11).

In Paragraph 2.6 werden für einige Gruppen Tabellen angegeben, die die Charaktere von Kronecker-Produkten von irreduziblen Darstellungen enthalten.

Auf dem Darstellungsraum  $V$  ist häufig ein Skalarprodukt gegeben. Im Fall des Polynomraums der Anwendung in dieser Arbeit ist das Skalarprodukt durch ein Integral gegeben.

Ist das Skalarprodukt bzgl.  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$   $G$ -invariant, d.h.

$$(\rho(t)(v), \rho(t)(w)) = (v, w), \quad \forall v, w \in V, \quad \forall t \in G$$

und wählt man die Darstellungsmatrizen  $D(t)$  bzgl. einer orthonormalen Basis, so sind die Matrizen unitär (Serre [64] S. 6). Man spricht von einer **unitären Darstellung**.

**Satz 2.11** (Stiefel/Fässler [67] S. 110): *Bei einer unitären Darstellung  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  sind in der kanonischen Zerlegung  $V = V_1 + \dots + V_h$  die Konglomerate  $V_i$  paarweise zueinander orthogonal.*

## 2.6 Irreduzible Darstellungen und Charaktere von $D_3, Ro_3, D_4, S_4$

Die Diedergruppe  $D_3 = \{id, r, r^2, s, sr, sr^2\}$  läßt sich als Drehungen und Spiegelungen eines gleichseitigen Dreiecks realisieren. Sie hat 2 eindimensionale, irreduzible Darstellungen  $\vartheta_1^1$  und  $\vartheta_2^1$  mit den zugehörigen Charakteren  $\psi_1$  und  $\psi_2$  (Tabelle 2.1).

Die dritte und letzte irreduzible Darstellung  $\vartheta_1^2$  ist zweidimensional und hat die Darstellungsmatrizen

$$D(r^k) = \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{-k} \end{pmatrix}, \quad D(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-k} \\ \omega^k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2,$$

wobei  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$  gilt (Serre [64] S.37f). Der zugehörige Charakter ist

$$\chi(r^k) = 2 \cos \frac{2\pi k}{3}, \quad \chi(sr^k) = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

Die kanonische Zerlegung eines Kronecker-Produktes zweier irreduzibler Darstellungen läßt sich aus Tabelle 2.1 ablesen. Das Tensorprodukt  $\vartheta_1^2 \times \vartheta_1^2$  mit Charakter  $\chi \cdot \chi = \psi_1 + \psi_2 + \chi$  hat z.B. die volle Ausreduktion  $\vartheta_1^1 + \vartheta_2^1 + \vartheta_1^2$ .

Die Untergruppe  $Ro_3 = \{id, r, r^2\}$  von  $D_3$  hat nur 3 eindimensionale, irreduzible Darstellungen (siehe Tabelle 2.2), wobei  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$  gilt.

Die Diedergruppe  $D_4 = \{id, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$  hat vier eindimensionale, irreduzible Darstellungen  $\vartheta_1^1, \vartheta_2^1, \vartheta_3^1, \vartheta_4^1$  mit den Charakteren  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  aus Tabelle 2.3 (Serre [64] S. 37).

	$r^k$	$sr^k$
$\psi_1$	1	1
$\psi_2$	1	-1

	$\psi_1$	$\psi_2$	$\chi$
$\psi_1$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\chi$
$\psi_2$	$\psi_2$	$\psi_1$	$\chi$
$\chi$	$\chi$	$\chi$	$\psi_1 + \psi_2 + \chi$

Tabelle 2.1: zwei Charaktere und Charakterprodukte von  $D_3$

	id	$r$	$r^2$
$\psi_1$	1	1	1
$\psi_2$	1	$\omega$	$\omega^2$
$\psi_3$	1	$\omega^2$	$\omega$

	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$
$\psi_1$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$
$\psi_2$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_1$
$\psi_3$	$\psi_3$	$\psi_1$	$\psi_2$

Tabelle 2.2: Charaktere und Charakterprodukte von  $R_{O_3}$

	$r^k$	$sr^k$
$\psi_1$	1	1
$\psi_2$	1	-1
$\psi_3$	$(-1)^k$	$(-1)^k$
$\psi_4$	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Tabelle 2.3: vier Charaktere von  $D_4$

Außerdem gibt es eine zweidimensionale Darstellung  $\vartheta_1^2$  mit Charakter  $\chi$  und den Darstellungsmatrizen

$$D(r^k) = \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{-k} \end{pmatrix}, D(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-k} \\ \omega^k & 0 \end{pmatrix}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Dabei ist  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{4}}$  und der zugehörige Charakter ist durch

$$\chi(r^k) = 2 \cos \frac{2\pi k}{4}, \quad \chi(sr^k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

gegeben.

	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$	$\chi$
$\psi_1$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$	$\chi$
$\psi_2$	$\psi_2$	$\psi_1$	$\psi_4$	$\psi_3$	$\chi$
$\psi_3$	$\psi_3$	$\psi_4$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\chi$
$\psi_4$	$\psi_4$	$\psi_3$	$\psi_2$	$\psi_1$	$\chi$
$\chi$	$\chi$	$\chi$	$\chi$	$\chi$	$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4$

Tabelle 2.4: Charakterprodukte für  $D_4$

Die symmetrische Gruppe  $S_4$  aller Permutationen von a,b,c,d läßt sich durch alle eigentlichen und uneigentlichen Bewegungen eines regelmäßigen Tetraeders realisieren. Sie hat die Ordnung 24.

Es gibt zwei eindimensionale, irreduzible Darstellungen, die triviale Darstellung  $\vartheta_1^1$  und die **alternierende** Darstellung  $\vartheta_2^1$  (Stiefel/Fässler [67] S. 26). Die Darstellungsmatrizen der zweidimensionalen Darstellung  $\vartheta_1^2$  und der dreidimensionalen Darstellung  $\vartheta_1^3$  finden sich in Stiefel/Fässler [67] S. 118-119.

Außerdem gibt es eine zweite dreidimensionale Darstellung  $\vartheta_2^3 = \vartheta_1^3 \times \vartheta_2^1$ . Die zugehörigen Charaktere (Tabelle 2.5) wurden Serre [64] S. 43 entnommen.

Da einem Würfel ein regelmäßiger Tetraeder so eingeschrieben werden kann, daß die Ecken des Tetraeders auch Ecken des Würfels sind, ist die Symmetriegruppe des Würfels isomorph zu  $Z_2 \times S_4$  (für  $Z_2$  siehe Definition 3.4). Die

	id	(ab)	(ab)(cd)	(abc)	(abcd)
$\chi_0$	1	1	1	1	1
$\varepsilon$	1	-1	1	1	-1
$\theta$	2	0	2	-1	0
$\psi$	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\psi$	3	-1	-1	0	1

Tabelle 2.5: Charaktere von  $S_4$

	$\chi_0$	$\varepsilon$	$\theta$	$\psi$	$\varepsilon\psi$
$\chi_0$	$\chi_0$	$\varepsilon$	$\theta$	$\psi$	$\varepsilon\psi$
$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\chi_0$	$\theta$	$\varepsilon\psi$	$\psi$
$\theta$	$\theta$	$\theta$	$\theta + \varepsilon + \chi_0$	$\psi + \varepsilon\psi$	$\psi + \varepsilon\psi$
$\psi$	$\psi$	$\varepsilon\psi$	$\psi + \varepsilon\psi$	$\chi_0 + \theta + \psi + \varepsilon\psi$	$\varepsilon + \theta + \psi + \varepsilon\psi$
$\varepsilon\psi$	$\varepsilon\psi$	$\psi$	$\psi + \varepsilon\psi$	$\varepsilon + \theta + \psi + \varepsilon\psi$	$\chi_0 + \theta + \psi + \varepsilon\psi$

Tabelle 2.6: Charakterprodukte für  $S_4$

Transformationen  $id \times t, t \in S_4$  lassen den Würfel und den Tetraeder invariant, während  $r^2 \times id, r^2 \in Z_2$  die Punktspiegelung am Schwerpunkt bedeutet, die den Würfel aber nicht den Tetraeder invariant läßt. Die 10 irreduziblen Darstellungen von  $Z_2 \times S_4$  ergeben sich aus denen von  $S_4$ .

## 2.7 Übertragung auf reelle lineare Darstellungen

In Stiefel und Fässler [67] und Serre [64] wird die lineare Darstellungstheorie nur für komplexe lineare Darstellungen behandelt. Überlicherweise interessie-

ren aber lineare Darstellungen  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  mit reellen Isomorphismen auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$ , die sich auf natürliche Weise als komplexe Darstellung betrachten läßt. Wie sich die Theorie auf diesen reellen Fall übertragen läßt, hängt von der Gruppe  $G$  ab.

**1. Fall :** Alle inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen  $\rho^i$  von  $G$  sind reell, d.h. die zugehörigen Charaktere  $\chi^i$  sind reellwertig und die Sätze an Darstellungsmatrizen  $D^i(t), t \in G$  sind reell wählbar.

Gruppen, die diese Eigenschaft haben, sind zum Beispiel  $D_3, D_4, S_4$ . Für diesen Fall kann man die komplexe Theorie einfach übernehmen.

Die Projektionen  $\Pi^i, \pi_{k,k}$  und die Abbildungen  $\pi_{k,l}$  sind reell, weil die Charaktere und Darstellungsmatrizen reell sind. Die reellen Bilder von  $\Pi^i$  sind die Konglomerate in der reellen kanonischen Zerlegung

$$V = \sum_{i=1}^h V_i.$$

Eine symmetriegerechte Basis, die bzgl. der reellen Darstellungsmatrizen transformiert wird, besteht aus Vektoren des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$ , da sie Bilder der reellen Abbildungen  $\pi_{k,l}$  sind.

Für einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $W$  mit der Basis  $w_1, \dots, w_m$  erhält man einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $W^{\mathbb{C}}$ , der von  $w_1, \dots, w_m$  aufgespannt wird, wenn die Multiplikation mit komplexen Zahlen zugelassen wird. In diesem Sinne gibt die obige reelle kanonische Zerlegung

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_h$$

auch die Zerlegung von  $V$  als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum wieder.

**2. Fall :** Die inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen sind entweder reell oder haben einen zugehörigen Charakter, der nicht reellwertig ist. Ein Beispiel ist  $Ro_3$ .

Sei  $\rho^j : G \longrightarrow GL(W_j)$  eine irreduzible Darstellung von  $G$  mit zugehörigem Charakter  $\chi^j$ , der nicht reellwertig ist ( $\chi^j(t) \notin \mathbb{R}$  für mindestens ein  $t \in G$ ). Dann ist

$$\rho^l : G \longrightarrow GL(W_j), \quad \rho^l(t) = \rho^j(t^{-1})$$

auch eine irreduzible Darstellung. Da für den zugehörigen Charakter  $\chi^l$  nach Serre [64] S. 10

$$\chi^l(t) = \chi^j(t^{-1}) = \overline{\chi^j(t)}, \quad t \in G$$

gilt, sind  $\rho^j$  und  $\rho^l$  nicht äquivalent, denn äquivalente Darstellungen haben den gleichen Charakter.

Faßt man die reelle lineare Darstellung  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  mit zugehörigem Charakter  $\chi$  komplex auf, so treten in der vollen Ausreduktion

$$\rho = \sum_{i=1}^h c_i \rho^i$$

die irreduziblen Darstellungen  $\rho^i$  und  $\rho^l$  mit gleicher Vielfachheit

$$c_j = (\chi, \chi^j) = (\chi, \chi^l) = c_l$$

auf (Satz 2.7).

In der komplexen kanonischen Zerlegung

$$V^{\mathbb{C}} = V_1 \oplus \dots \oplus V_h$$

haben die Konglomerate  $V_j$  und  $V_l$  die gleiche Dimension  $c_j n_j = c_l n_l$ . Es gilt sogar  $V_j = \overline{V_l}$ , weil die Projektionen konjugiert komplex zueinander sind:

$$\Pi^j = \frac{n_j}{g} \sum_{t \in G} \overline{\chi^j(t)} \rho(t) = \frac{n_l}{g} \sum_{t \in G} \chi^l(t) \rho(t) = \overline{\Pi^l}.$$

Meistens ist man aber an reellen,  $G$ -invarianten Unterräumen des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$  interessiert.

Da für  $v \in V_j$  auch  $\bar{v} \in V_l$  gilt, gibt es einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V_{jl}$  mit

$$V_{jl}^{\mathbb{C}} = V_j + V_l.$$

Bei einer reellen Zerlegung von  $V$  tritt  $V_{jl}$  auf, wobei die zugehörige Teildarstellung den reellen Charakter  $c_j(\chi^j + \chi^l)$  besitzt. Wegen  $\Pi^j = \overline{\Pi^l}$  und  $V_j \perp V_l$  für ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt (siehe Satz 2.11) ist

$$\Pi^j + \Pi^l$$

eine reelle Projektion auf  $V_{jl}$  und

$$i(\Pi^j - \Pi^l)$$

eine reelle Abbildung mit Bild  $V_{jl}$ .

**3. Fall :** Es gibt eine irreduzible Darstellung mit reellwertigem Charakter, aber nicht alle Darstellungsmatrizen sind gleichzeitig reell wählbar. Gruppen mit dieser Eigenschaft treten in dieser Arbeit nicht auf.

---

## Kapitel 3

# G-invariante Kubaturformeln und lineare Darstellungen

In diesem Kapitel wird der Konstruktionsweg mit gemeinsamen Nullstellen von hinreichend orthogonalen Polynomen aus Kapitel 1 mit der Theorie der linearen Darstellungen aus Kapitel 2 zur Konstruktion von  $G$ -invarianten Kubaturformeln verbunden. Nach einigen Beispielen für lineare Darstellungen auf Polynomräumen wird geklärt, welche  $G$ -invarianten Ansätze für die  $d$ -orthogonalen Polynome möglich sind. Danach wird die Struktur der Symmetrie auf dem Ideal betrachtet und daraus ein Konstruktionsprinzip für  $G$ -invariante Kubaturformeln abgeleitet.

### 3.1 Beispiele für lineare Darstellungen auf Polynomräumen

Die Diedergruppe  $D_4 := \{id, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$  ist die Gruppe der Drehungen und Spiegelungen des  $\mathbb{R}^2$ , die das Quadrat  $C_2$  unverändert lassen.

$$r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longrightarrow (-y, x)$$

ist die Drehung um  $\pi/2$  und

$$s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longrightarrow (-x, y)$$

die Spiegelung an der  $y$ -Achse. Die anderen linearen Abbildungen ergeben sich aus diesen beiden, da  $s$  und  $r$  die Gruppe  $D_4$  erzeugen.  $C_2$  ist also  $D_4$ -invariant. Damit ist auch das Integral

$$I(f) := \int \int_{C_2} f(x, y) dx dy.$$

$D_4$ -invariant. Daraus ergibt sich eine lineare Darstellung auf dem Polynomring  $\mathbb{R}[x, y]$ .

**Beispiel 3.1** : Wir bezeichnen mit

$$\begin{aligned} \rho : D_4 &\longrightarrow GL(\mathbb{R}[x, y]) \quad \text{die durch} \\ \rho(r) : \mathbb{R}[x, y] &\longrightarrow \mathbb{R}[x, y], \quad p(x, y) \longrightarrow p(-y, x) \quad , \\ \rho(s) : \mathbb{R}[x, y] &\longrightarrow \mathbb{R}[x, y], \quad p(x, y) \longrightarrow p(-x, y) \end{aligned}$$

definierte lineare Darstellung. Da  $r$  und  $s$   $D_4$  erzeugen, ist durch  $\rho(r)$  und  $\rho(s)$  bereits eine lineare Darstellung festgelegt.

In Kapitel 2 werden nur lineare Darstellungen auf endlichdimensionalen Vektorräumen betrachtet. Aber  $\rho$  ist auf dem Ring  $\mathbb{R}[x, y]$  definiert. Da die Teildarstellungen  $\rho^k$  für beliebiges  $k \in \mathbb{N}$  auf endlichdimensionalen Vektorräumen definiert sind, lassen sich alle Resultate darauf übertragen. In Paragraph 2.7 wird ausgeführt, daß es für diese Gruppe keinen Unterschied macht, ob die lineare Darstellung auf einem komplexen oder reellen Vektorraum definiert ist.

$\rho$  zerfällt in irreduzible Darstellungen. Beispiele für irreduzible Teildarstellungen sind

$$\begin{aligned} \rho^1 : D_4 &\longrightarrow GL(\text{span}(x^2 + y^2)), \\ \rho^2 : D_4 &\longrightarrow GL(\text{span}(xy(x^2 - y^2))), \\ \rho^3 : D_4 &\longrightarrow GL(\text{span}(x^2 - y^2)), \\ \rho^4 : D_4 &\longrightarrow GL(\text{span}(xy)), \\ \rho^5 : D_4 &\longrightarrow GL(\text{span}(x, y)), \end{aligned}$$

wobei die linearen Abbildungen  $\rho^i(t), i = 1, \dots, 5, t \in D_4$  jeweils Einschränkungen von  $\rho(t)$  sind.  $\rho^i$  sind also Teildarstellungen von  $\rho$ . Alle 5 Vektorräume sind  $D_4$ -invariant, aber nur das Polynom  $x^2 + y^2$  ist  $D_4$ -invariant im

Sinne der Definition aus Paragraph 1.1, weil  $\rho^1$  die triviale Darstellung ist. Für  $p_4(x, y) := xy$  ist  $\text{span}(p_4)$   $D_4$ -invariant, aber nicht  $p_4$  selbst. Es gilt z.B.  $\rho^4(s)(p_4) = -p_4$ . Die zugehörigen Charaktere  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  zu  $\rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4$  entnimmt man Tabelle 2.3, sowie den Charakter  $\chi$  zugehörig zu  $\rho^5$  aus Abschnitt 2.6.

Da  $\rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4$  eindimensionale Darstellungen sind, haben die Charaktere folgende Bedeutung:

$$\rho^i(t)(p) = \psi_i(t) \cdot p, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \forall t \in D_4.$$

Sei  $W := \text{span}((x^2 + y^2)(x^2 - y^2))$ . Dann ist die Teildarstellung  $\rho^W : D_4 \rightarrow GL(W)$  von  $\rho$  äquivalent zu  $\rho^3$ . Die äquivalenten, irreduziblen Darstellungen werden in der vollen Ausreduktion zusammengefaßt. Die volle Ausreduktion z.B. von

$$\begin{aligned} \rho^{\mathbb{P}^4} : D_4 &\longrightarrow GL(\mathbb{P}^4) \quad \text{ist} \\ \rho^{\mathbb{P}^4} &= 4 \cdot \rho^1 + 1 \cdot \rho^2 + 2 \cdot \rho^3 + 2 \cdot \rho^4 + 3 \cdot \rho^5. \end{aligned}$$

Für den zugehörigen Charakter  $\chi^0$  von  $\rho^{\mathbb{P}^4}$  gilt also

$$\chi^0 = 4 \cdot \psi_1 + 1 \cdot \psi_2 + 2 \cdot \psi_3 + 2 \cdot \psi_4 + 3 \cdot \chi.$$

Die kanonische Zerlegung ist dann

$$\mathbb{P}^4 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \text{span}(1, x^2 + y^2, x^2 y^2, (x^2 + y^2)^2), \\ V_2 &= \text{span}(xy(x^2 - y^2)), \\ V_3 &= \text{span}(x^2 - y^2, (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)), \\ V_4 &= \text{span}(xy, xy(x^2 + y^2)), \\ V_5 &= \text{span}(x, y, x^3, y^3, x^2 y, xy^2). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^5 \dim V_i = 4 + 1 + 2 + 2 + 6 = 15 = \dim \mathbb{P}^4.$$

Diese Konglomerate  $V_i, i = 1, \dots, 5$  berechnet man leicht mit Hilfe der Projektionen aus Satz 2.8 und die Vielfachheiten der irreduziblen Darstellungen mit Satz 2.7. Zum Beispiel ist  $\Pi^5$ , definiert durch

$$\begin{aligned} q &:= \Pi^5(p) = \frac{n_5}{8} \sum_{t \in D_4} \overline{\chi(t)} \rho(t)(p) = \frac{2}{8} (2\rho(id)(p) - 2\rho(r^2)(p)), \\ q(x, y) &= \frac{1}{2} p(x, y) - \frac{1}{2} p(-x, -y), \end{aligned}$$

die Projektion auf das Konglomerat  $V_5$ .

Betrachtet man die volle Ausreduktion und kanonische Zerlegung für  $\mathbb{P}_k$  mit  $k > 4$ , so erhöhen sich die Vielfachheiten in der vollen Ausreduktion und auch die Konglomerate sind entsprechend größer.

Das Integrationsgebiet  $T_2$ , das Dreieck, hat die Symmetrie der Diedergruppe  $D_3 := \{id, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ , wobei die affin linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & (x, y) &\longrightarrow (y, 1 - x - y) \\ s : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & (x, y) &\longrightarrow (y, x) \end{aligned}$$

die Gruppe erzeugen. Unter  $D_3$  sind das Dreieck  $T_2$  und das Integral

$$I(f) = \int \int_{T_2} f(x, y) dx dy$$

invariant. Auch auf dem Polynomraum ergibt sich wie für  $D_4$  eine lineare Darstellung:

**Beispiel 3.2** : Durch  $\rho : D_3 \longrightarrow GL(\mathbb{R}[x, y])$  ist mit

$$\begin{aligned} \rho(r) : \mathbb{R}[x, y] &\longrightarrow \mathbb{R}[x, y], & p(x, y) &\longrightarrow p(y, 1 - x - y), \\ \rho(s) : \mathbb{R}[x, y] &\longrightarrow \mathbb{R}[x, y], & p(x, y) &\longrightarrow p(y, x) \end{aligned}$$

eine lineare Darstellung definiert, wobei sich alle  $\rho(t)$  aus  $\rho(r), \rho(s)$  ergeben.

Nach Abschnitt 2.6 hat  $D_3$  als inäquivalente, irreduzible Darstellungen zwei eindimensionale Darstellungen und eine zweidimensionale Darstellung. Dort werden auch die zugehörigen Charaktere  $\psi_1, \psi_2$  und  $\chi$  angegeben.

Für die kanonische Zerlegung  $\mathbb{P}_3 = V_1 + V_2 + V_3$  gilt

$$\begin{aligned} \text{span}(1, q(x, y), xy(1 - x - y)) &= V_1, \\ \text{span}((x - y)(1 - 2x - y)(1 - x - 2y)) &= V_2, \\ \text{span}(x - \frac{1}{3}, y - \frac{1}{3}, (x - \frac{1}{3})q(x, y), (y - \frac{1}{3})q(x, y)) &\subset V_3, \end{aligned}$$

wobei  $q(x, y) := x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2$  gilt.

Das Integrationsgebiet  $T_3$  ist invariant unter einer Gruppe von affin linearen Transformationen, die isomorph zu  $S_4$ , der Gruppe der Permutationen von 4

Elementen, ist. Eine Permutation der Elemente  $a, b, c, d$  entspricht der analogen Permutation der baryzentrischen Koordinaten  $x, y, z, 1 - x - y - z$  bzw. der Permutation der Ecken des Tetraeders.  $(a, b)$  entspricht der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longrightarrow (y, x, z)$$

und  $(a, d)$  entspricht der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longrightarrow (1 - x - y - z, y, z).$$

**Beispiel 3.3** : *Durch*

$$\rho : S_4 \longrightarrow GL(\mathbb{R}[x, y, z]),$$

$$\rho(t) : \mathbb{R}[x, y, z] \longrightarrow \mathbb{R}[x, y, z], \quad p(x, y, z) \longrightarrow p(t(x, y, z))$$

ist eine lineare Darstellung gegeben.

Die paarweise inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen von  $S_4$  sind 2 eindimensionale und eine zweidimensionale sowie 2 dreidimensionale Darstellungen (siehe Paragraph 2.6) mit den zugehörigen Charakteren  $\chi_0, \epsilon, \theta, \psi, \epsilon\psi$  aus Tabelle 2.5.

Die Diedergruppen  $D_3$  und  $D_4$  haben Untergruppen, die hier auch betrachtet werden sollen.

Die zyklische Gruppe  $Ro_3 := \{id, r, r^2\} \subset D_3$  beschreibt eine Untersymmetrie von  $T_2$ . Nach Abschnitt 2.6 gibt es 3 inäquivalente, irreduzible Darstellungen. Schränkt man die lineare Darstellung  $\rho : D_3 \longrightarrow GL(\mathbb{P}_k)$  aus Beispiel 3.2, die man jetzt komplex auffaßt, auf  $Ro_3$  ein, so gibt es also 3 Konglomerate  $W_1^{\mathbb{C}}, W_2^{\mathbb{C}}, W_3^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}[x, y]$ , zugehörig zu den irreduziblen Darstellungen von  $Ro_3$ . Seien  $V_1^{\mathbb{C}}, V_2^{\mathbb{C}}, V_3^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}[x, y]$  die Konglomerate zugehörig zu  $D_3$ , so gilt

$$W_1^{\mathbb{C}} = V_1^{\mathbb{C}} + V_2^{\mathbb{C}} \text{ und } W_2^{\mathbb{C}} + W_3^{\mathbb{C}} = V_3^{\mathbb{C}}.$$

Welche reellen,  $Ro_3$ -invarianten Unterräume von  $\mathbb{P}_k$  existieren, wird in Abschnitt 2.7 im 2. Fall beschrieben.

**Definition 3.4** : *Einige Untergruppen der Diedergruppe  $D_4$  seien durch*

$$Sya := \{id, r^2, s, sr^2\}$$

$$Syd := \{id, r^2, sr, sr^3\}$$

$$Ro_4 := \{id, r, r^2, r^3\}$$

$$Z_2 := \{id, r^2\}.$$

bezeichnet. Die Untergruppe von  $S_4$ , die alle geraden Permutationen der baryzentrischen Koordinaten enthält, wird mit  $A_4$  bezeichnet.

Für die Untergruppen  $Sya, Syd, Ro_4$  von  $D_4$  und  $A_4$  von  $S_4$  bzw. die Einschränkungen der Darstellungen  $\rho : D_4 \rightarrow GL(\mathbb{R}[x, y])$  aus Beispiel 3.1 und  $\rho : S_4 \rightarrow GL(\mathbb{R}[x, y, z])$  aus Beispiel 3.3 und die Konglomerate dazu gelten ähnliche Beziehungen wie für die Konglomerate von  $Ro_3$  und  $D_3$ . Das hat Folgen, auf die in Paragraph 4.2 eingegangen wird.

Die lineare Darstellung

$$\rho : Z_2 \rightarrow GL(\mathbb{P}_k) \quad \text{mit}$$

$$\rho(r^2) : \mathbb{P}_k \rightarrow \mathbb{P}_k, \quad p(x, y) \rightarrow p(-x, -y)$$

hat die kanonische Zerlegung

$$\mathbb{P}_k = W_1 \oplus W_2,$$

wobei  $W_1$  von allen geraden Monomen und  $W_2$  von allen ungeraden Monomen aufgespannt wird.

Der Würfel  $C_3$  ist invariant unter einer Gruppe mit Ordnung 48, die isomorph ist zu  $Z_2 \times S_4$ . Dabei entspricht  $r^2 \times id$  der Punktspiegelung

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$$

und  $id \times (a, b)$  der Spiegelung

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \rightarrow (y, x, z).$$

Dabei lassen die Transformationen  $id \times t, t \in S_4$  einen eingeschriebenen, regelmäßigen Tetraeder invariant. Durch

$$\rho : Z_2 \times S_4 \rightarrow GL(\mathbb{R}[x, y, z]) \quad \text{mit}$$

$$\rho(t) : \mathbb{R}[x, y, z] \rightarrow \mathbb{R}[x, y, z], \quad p(x, y, z) \rightarrow p(t(x, y, z)), \quad t \in Z_2 \times S_4$$

wird eine lineare Darstellung definiert.

## 3.2 G-invariante Ansätze

In Kapitel 1 wird für die Konstruktion von Kubaturformeln vom Grad  $d$  ausgeführt, daß man einen Ansatz mit  $d$ -orthogonalen Polynomen für die  $H$ -Basis des zugehörigen Ideals machen kann. Hier wird geklärt, welche möglichen Ansätze es für eine  $G$ -invariante Kubaturformel gibt.

Gegeben sei also eine Gruppe  $G$  von linearen bzw. affin linearen Transformationen des  $\mathbb{R}^N$  und ein positives Integral

$$I(f) = \int_{\Omega} w(\underline{x})f(\underline{x})d\underline{x}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N, w(\underline{x}) \in C(\mathbb{R}^N).$$

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß  $I$   $G$ -invariant ist, d.h.

$$t(\Omega) = \Omega, \quad w(t(\underline{x})) = w(\underline{x}) \quad \forall t \in G, \underline{x} \in \Omega \quad \text{gilt.}$$

Zur Definition der  $G$ -Invarianz von Polynomräumen kann die lineare Darstellung

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(\mathbb{R}[\underline{x}]), \\ \rho(t) : \mathbb{R}[\underline{x}] &\longrightarrow \mathbb{R}[\underline{x}], \quad p(\underline{x}) \longrightarrow p(t(\underline{x})) \end{aligned}$$

benutzt werden. Das Integral  $I$  ist genau dann  $G$ -invariant, wenn

$$I(p) = I(\rho(t)(p)) \quad \forall t \in G, p \in \mathbb{R}[\underline{x}]$$

gilt. Eine Kubaturformel  $Q$  ist  $G$ -invariant, wenn

$$Q(p) = Q(\rho(t)(p)) \quad \forall t \in G, p \in \mathbb{R}[\underline{x}]$$

gilt.

Das ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn die Knotenmenge  $K(Q)$   $G$ -invariant ist, d. h. wenn

$$t(\underline{y}_i) \in K(Q) \quad \forall t \in G, \underline{y}_i \in K(Q)$$

gilt, und die Gewichte  $A_i, A_j$  gleich sind, wenn die zugehörigen Knoten  $\underline{y}_i, \underline{y}_j$  zur gleichen  $G$ -Korona ( $G$ -Orbit) gehören.

Zur Knotenmenge  $K(Q)$  gibt es ein Ideal  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$ , das alle Polynome  $p \in \mathbb{R}[\underline{x}]$  umfaßt, die in den Knoten verschwinden. Manchmal ist es auch sinnvoll, das komplexe, zugehörige Ideal

$$\mathcal{A}^{\mathbb{C}} := \{p \in \mathbb{C}[\underline{x}] \mid p(\underline{y}) = 0 \quad \forall \underline{y} \in K(Q)\} \subset \mathbb{C}[\underline{x}]$$

zu betrachten. Da  $K(Q)$  nur reelle Punkte enthält, gilt  $\bar{p} \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$  für jedes  $p \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ . Umgekehrt ist jedem Ideal  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}[\underline{x}]$  mit der Eigenschaft

$$p \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \implies \bar{p} \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$$

eindeutig ein reelles Ideal  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$  zugeordnet. Die Menge der Nullstellen  $\mathcal{N}$  von  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$  ist dann auch die Menge der Nullstellen von  $\mathcal{A}$ .  $\mathcal{N}$  enthält reelle Punkte und Paare von zueinander konjugiert komplexen Punkten.

Da die (affin) linearen Abbildungen  $t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  der Gruppe  $G$  zu komplexen Abbildungen  $t : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  erweitert werden können, ist der Begriff der  $G$ -Invarianz auf komplexe Punktengen  $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}^N$  übertragbar.  $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}^N$  ist  $G$ -invariant, wenn

$$t(\underline{y}) \in \mathcal{N} \quad \forall t \in G \quad \forall \underline{y} \in \mathcal{N}$$

gilt.

Außerdem kann  $\rho$  zu einer komplexen linearen Darstellung auf  $\mathbb{C}[\underline{x}]$  erweitert werden. Ein Vektorraum  $W \subseteq \mathbb{R}[\underline{x}]$  bzw.  $W \subseteq \mathbb{C}[\underline{x}]$  ist also  $G$ -invariant, wenn

$$\rho(t)(p) \in W \quad \forall t \in G \quad \forall p \in W$$

gilt. Damit gilt folgendes, bekanntes Lemma.

**Lemma 3.5** : Sei  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$  eine Menge von Punkten und

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{p \in \mathbb{R}[\underline{x}] \mid p(\underline{y}) = 0 \quad \forall \underline{y} \in \mathcal{N}\} \quad \text{bzw.} \\ \mathcal{A}^{\mathbb{C}} &:= \{p \in \mathbb{C}[\underline{x}] \mid p(\underline{y}) = 0 \quad \forall \underline{y} \in \mathcal{N}\} \end{aligned}$$

das zugehörige Ideal. Dann ist  $\mathcal{A}$  (bzw.  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ ) genau dann  $G$ -invariant, wenn  $\mathcal{N}$   $G$ -invariant ist.

BEWEIS: Sei  $\mathcal{N}$   $G$ -invariant und  $p \in \mathcal{A}$ . Dann gilt für beliebiges  $t \in G$  und  $q := \rho(t)(p)$  auch  $q \in \mathcal{A}$ , weil wegen  $t(\underline{y}) \in \mathcal{N}$  für  $\underline{y} \in \mathcal{N}$

$$q(\underline{y}) = \rho(t)(p(\underline{y})) = p(t(\underline{y})) = 0$$

gilt. Sei umgekehrt  $\mathcal{A}$   $G$ -invariant und  $\underline{y} \in \mathbb{R}^N$  eine Nullstelle des Ideals, d.h.

$$p(\underline{y}) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{A}.$$

Für alle  $t \in G$  gilt  $\rho(t)(p) \in \mathcal{A}$ , also  $\rho(t)(p(\underline{y})) = 0 = p(t(\underline{y}))$ . Es gilt also auch  $t(\underline{y}) \in \mathcal{N}$ , d.h.  $\mathcal{N}$  ist  $G$ -invariant. ■

Hat ein  $G$ -invariantes Ideal  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$  eine komplexe Nullstellenmenge  $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}^N$ , so ist  $\mathcal{N}$  auch  $G$ -invariant.

Wählt man eine H-Basis also so, daß das erzeugte Ideal  $\mathcal{A}$   $G$ -invariant ist, so bilden die Nullstellen eine  $G$ -invariante Menge. Sind außerdem die Bedingungen aus Satz 1.5 für die Existenz einer Kubaturformel vom Grad  $d$  erfüllt, so kann man nach folgendem Satz die Gewichte so wählen, daß die Formel  $G$ -invariant ist. In diesem Sinne sind viele Formeln konstruiert worden.

**Satz 3.6** : Sei  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$  ein  $G$ -invariantes Ideal mit  $n$  paarweise verschiedenen, reellen Nullstellen  $\underline{y}_j, j = 1, \dots, n$  und sei

$$I_{\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_d} = 0$$

erfüllt. Dann gibt es eine  $G$ -invariante Kubaturformel

$$Q(f) = \sum_{i=1}^n A_i f(\underline{y}_i)$$

vom Grad mindestens  $d$  mit den Nullstellen als Knoten.

BEWEIS: Da  $\mathcal{A}$   $G$ -invariant ist, folgt die  $G$ -Invarianz der Nullstellenmenge aus Lemma 3.5. Nach Satz 1.5 folgt die Existenz von Gewichten  $A_i$ , so daß  $Q(f)$  mindestens den Grad  $d$  hat. Es bleibt also zu zeigen, daß die Gewichte zusätzlich so gewählt werden können, daß  $A_i = A_j$  gilt, falls für die zugehörigen Knoten ein  $t \in G$  existiert mit  $t(\underline{y}_i) = \underline{y}_j$ .

Es gibt einen affin linearen Raum als Lösungsmenge für die Gewichte. Dieser Raum ist  $G$ -invariant, denn ist

$$Q(f) = \sum_{i=1}^n A_{\underline{y}_i} f(\underline{y}_i)$$

eine Kubaturformel vom Grad  $d$ , so ist auch

$$Q_t(f) = \sum_{i=1}^n A_{\underline{y}_i} f(t(\underline{y}_i)) = \sum_{i=1}^n A_{t^{-1}(\underline{y}_i)} f(\underline{y}_i) = Q(f \circ t).$$

eine Kubaturformel vom Grad  $d$  mit den gleichen Knoten. Dann ist

$$\begin{aligned} Q_{\Sigma}(f) &= \frac{1}{g} \sum_{t \in G} Q_t(f) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \sum_{i=1}^n A_{\underline{y}_i} f(t(\underline{y}_i)) \\ &= \frac{1}{g} \sum_{i=1}^n \sum_{t \in G} A_{t(\underline{y}_i)} f(\underline{y}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{g} \sum_{t \in G} A_{t(\underline{y}_i)} \right) f(\underline{y}_i) \end{aligned}$$

eine *G*-invariante Kubaturformel vom Grad *d*. ■

Ein Teil der Aussage des obigen Satzes wird auch von Münzel und Renner [51] bewiesen. Dort wird vorausgesetzt, daß die Knoten die Gewichte eindeutig bestimmen.

Ist  $\mathcal{A}$  *G*-invariant, so sind auch  $\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_k$  für beliebiges *k* *G*-invariant, da die Schnittmenge von *G*-invarianten Räumen *G*-invariant ist.

Als nächstes wird die Frage geklärt, welche H-Basen  $p_1, \dots, p_m$  für *G*-invariante Ideale  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$  möglich sind.

Ist für eine beliebige Idealbasis  $p_1, \dots, p_m$  der Vektorraum  $\text{span}(p_1, \dots, p_m)$  *G*-invariant, so ist damit auch das Ideal  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$  *G*-invariant. Für eine Idealbasis  $p_1, \dots, p_m$  ist allerdings auch der Fall möglich, daß  $\text{span}(p_1, \dots, p_m)$  nicht *G*-invariant ist, aber ein *G*-invariantes Ideal  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$  erzeugt wird.

Im folgenden werden volle Ausreduktionen, kanonische Zerlegungen und symmetriegerechte Basen von Teildarstellungen von  $\rho$  betrachtet. Da  $\rho$  ursprünglich eine reelle Darstellung ist, hängen die folgenden Betrachtungen von der Gruppe *G* ab, die in Paragraph 2.7 in drei Fälle unterteilt wurde.

Angenommen *G* hat *h* paarweise inäquivalente, irreduzible Darstellungen  $\rho^i$ , die alle reell sind, so gibt es eine kanonische Zerlegung

$$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_N] = V_1 \oplus \dots \oplus V_h \quad \text{mit} \quad V_i \subseteq \mathbb{R}[\underline{x}].$$

Dabei gehört jedes Konglomerat  $V_i$  zu einer irreduziblen Darstellung  $\rho^i$ . Für ein *G*-invariantes Ideal  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$  gilt für die kanonische Zerlegung

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= V_1^{\mathcal{A}} \oplus V_2^{\mathcal{A}} \oplus \dots \oplus V_h^{\mathcal{A}} \\ V_i^{\mathcal{A}} &\subseteq V_i, \quad i = 1, \dots, h. \end{aligned}$$

Gibt es für *G* außer reelle, irreduzible Darstellungen auch irreduzible Darstellungen mit nichtreellem Charakter, so gibt es für den Polynomring  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$  eine komplexe kanonische Zerlegung:

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N] = V_1^{\mathbb{C}} \oplus \dots \oplus V_h^{\mathbb{C}} \quad \text{mit} \quad V_i^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N].$$

Für ein *G*-invariantes Ideal  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$  hat das zugehörige, komplexe Ideal  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}[\underline{x}]$  eine kanonische Zerlegung

$$\mathcal{A}^{\mathbb{C}} = V_1^{\mathcal{A}^{\mathbb{C}}} \oplus \dots \oplus V_h^{\mathcal{A}^{\mathbb{C}}} \quad \text{mit} \quad V_i^{\mathcal{A}^{\mathbb{C}}} \subset V_i^{\mathbb{C}} \quad i = 1, \dots, h.$$

Für  $\mathcal{A}$  betrachtet man die reelle kanonische Zerlegung von  $\mathcal{A}$  und  $\mathbb{R}[\underline{x}]$ , wobei auch

$$V_i^{\mathcal{A}} \subset V_i, \quad i = 1, \dots, l$$

gilt. Dabei werden Konglomerate aus der komplexen kanonischen Zerlegung, die zueinander konjugiert komplex sind, zusammengefaßt zu reellen Konglomeraten.

Folgender Satz besagt, daß man die Polynome aus einer H-Basis eines  $G$ -invarianten Ideals  $\mathcal{A}$  aus jeweils einem Konglomerat  $V_i^{\mathcal{A}}$ , also jeweils von einem Symmetriotyp, wählen kann.

**Satz 3.7** : Sei  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$  ein  $G$ -invariantes Ideal. Bilden  $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{x}]$  eine H-Basis, so bilden für jedes  $t \in G$  auch

$$\rho(t)(p_1), \dots, \rho(t)(p_m)$$

eine H-Basis von  $\mathcal{A}$ . Hat die Gruppe  $G$   $h$  inäquivalente, irreduzible Darstellungen, die alle reell sind, so hat  $\mathcal{A}$  die kanonische Zerlegung

$$\mathcal{A} = V_1^{\mathcal{A}} \oplus \dots \oplus V_h^{\mathcal{A}} \quad \text{mit} \quad V_i^{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}[\underline{x}].$$

$\mathcal{A}$  hat dann eine H-Basis

$$p_j^i \in V_i^{\mathcal{A}}, \quad i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, m_i,$$

die einen  $G$ -invarianten Vektorraum  $E \subset \mathcal{A}$  aufspannen.

Falls die Gruppe  $G$   $h$  irreduzible Darstellungen hat, die entweder reell sind oder einen nichtreellen, zugehörigen Charakter haben, so hat  $\mathcal{A}$  eine reelle kanonische Zerlegung

$$\mathcal{A} = V_1^{\mathcal{A}} \oplus \dots \oplus V_l^{\mathcal{A}} \quad \text{mit} \quad V_i^{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$$

mit  $l \leq h - 1$ . Die Aussage über die H-Basis gilt entsprechend.

**BEWEIS:**  $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{x}]$  bilden eine H-Basis von  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}[\underline{x}]$ . Für alle  $p \in \mathcal{A}$  existieren also  $q_j$  vom Grad  $\leq \text{Grad}(p) - \text{Grad}(p_j)$  mit

$$p = \sum_{j=1}^m q_j p_j.$$

Sei  $t \in G$  beliebig, aber fest gewählt. Für alle  $p \in \mathcal{A}$  hat also auch  $\rho(t^{-1})(p)$  obige Darstellung

$$\rho(t^{-1})(p) = \sum_{j=1}^m \tilde{q}_j p_j.$$

Da die lineare Darstellung  $\rho$  den Grad erhält, gilt also

$$\text{Grad}(\rho(t)(\tilde{q}_j)) \leq \text{Grad}(p) - \text{Grad}(\rho(t)(p_j))$$

und

$$p = \sum_{j=1}^m \rho(t)(\tilde{q}_j) \cdot \rho(t)(p_j).$$

Damit ist gezeigt, daß auch  $\rho(t)(p_j), j = 1, \dots, m$  für festes  $t$  eine H-Basis von  $\mathcal{A}$  bilden.

Damit bilden erst recht  $\rho(t)(p_j), j = 1, \dots, m$ , wobei die Polynome für alle  $t$  aufgelistet werden, eine H-Basis. Sie erzeugen einen  $G$ -invarianten Raum. Unter den Voraussetzungen an  $G$  sind die Projektionen  $\Pi^i$  auf die Konglomerate entweder reell oder es gibt eine weitere Projektion  $\Pi^\lambda = \overline{\Pi^i}$ , so daß mittels  $\Pi^i$  bzw.  $\Pi^i + \Pi^\lambda$  eine Basis  $p_j^i, j = 1, \dots, m_i$  berechnet werden kann, deren Polynome  $p_j^i$  Elemente der Konglomerate  $V_i^{\mathcal{A}}, i = 1, \dots, h$  (bzw.  $i = 1, \dots, l$ ) sind. Da nur eine andere Vektorraumbasis gebildet wird, wobei der Polynomgrad gleich bleibt oder erniedrigt wird, bilden auch die Polynome  $p_j^i$  eine H-Basis von  $\mathcal{A}$ . ■

Für jedes Ideal  $\mathcal{A}$  gibt es eine H-Basis mit minimaler Anzahl der Polynome in der H-Basis. Man kann zeigen, daß es für ein  $G$ -invariantes Ideal eine H-Basis mit Polynomen aus den Konglomeraten gibt, so daß die Anzahl der Polynome in der H-Basis gleich der kleinstmöglichen Anzahl ist.

Bilden die  $p_j^i$  die H-Basis eines  $G$ -invarianten Ideals, das zu einer  $G$ -invarianten Kubaturformel vom Grad  $d$  gehört, so sind die Polynome  $p_j^i$  nach Satz 1.3  $d$ -orthogonal. Diese weitere Einschränkung wird jetzt untersucht und damit geklärt, welche  $G$ -invarianten Ansätze möglich sind.

$\mathbb{P}_k$  ist für beliebiges  $k \in \mathbb{N}$  ein  $G$ -invarianter Unterraum.  $\mathbb{P}_{k-1}$  ist insbesondere ein  $G$ -invarianter Unterraum von  $\mathbb{P}_k$ . Nach Satz 2.1 gibt es einen  $G$ -invarianten Unterraum  $M_k$  von  $\mathbb{P}_k$  mit der Eigenschaft

$$\mathbb{P}_k = M_k \oplus \mathbb{P}_{k-1}.$$

$M_k$  ist natürlich nicht eindeutig bestimmt. Ein Beispiel für  $M_k$  ist  $K_k$ , der Raum der orthogonalen Polynome vom Grad  $k$ .

**Lemma 3.8** :  $K_k$ , der Raum der orthogonalen Polynome vom Grad  $k$ , ist  $G$ -invariant.

BEWEIS: Sei  $p \in K_k$ . Es gilt also

$$I(pq) = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_{k-1}.$$

Dann folgt aus der  $G$ -Invarianz des Integrals  $I$

$$I(\rho(t)(p)q) = I(p\rho(t^{-1})(q)) = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_{k-1} \forall t \in G.$$

Also gilt  $\rho(t)(p) \in K_k \forall t \in G, p \in K_k$ . ■

Da die Zerlegung für beliebigen Grad gemacht werden kann, gilt

$$\mathbb{P}_k = \sum_{j=0}^k M_j,$$

wobei  $M_0 := \text{span}(1)$  gilt und die  $M_j, j \geq 1$  nicht eindeutig bestimmte,  $G$ -invariante Unterräume sind. Nach Lemma 3.8 gilt z.B.

$$\mathbb{P}_k = \sum_{j=1}^k K_j + M_0.$$

Sind alle irreduziblen Darstellungen von  $G$  reell, so kann man jeden  $G$ -invarianten Raum  $M_j$  in Konglomerate  $M_j^i \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N], i = 1, \dots, h$  in der kanonischen Zerlegung

$$M_j = \sum_{i=1}^h M_j^i$$

aufspalten. Es gilt also

$$\mathbb{P}_k = M_0 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^h M_j^i. \quad (3.1)$$

Dabei gilt für die kanonische Zerlegung

$$\mathbb{P}_k = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_h$$

$$V_1 = M_0 + \sum_{j=1}^k M_j^1 \quad \text{und} \quad V_i = \sum_{j=1}^k M_j^i, \quad i = 2, \dots, h.$$

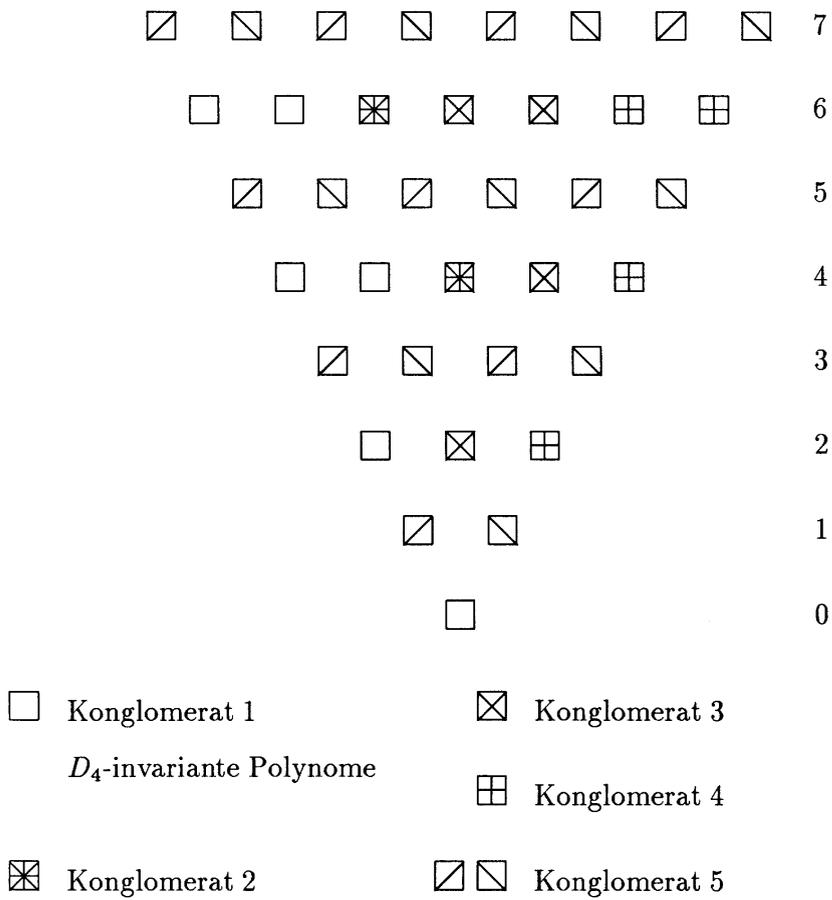


Abbildung 3.1: Struktur des Polynomringes unter  $D_4$

Ein Spezialfall ist  $M_j^i = K_j^i$  mit den Konglomeraten  $K_j^i$  aus der kanonischen Zerlegung

$$K_j = \sum_{i=1}^h K_j^i.$$

Im Fall von  $G = D_4$  veranschaulicht Bild 3.1 die Struktur des Ringes  $\mathbb{R}[x, y]$ , die in (3.1) ausgedrückt wird.

Die konkrete Berechnung der  $M_j^i$  oder der Dimension von  $M_j^i$  erfolgt dabei nach Kapitel 2 mit Hilfe der Sätze 2.7, 2.8 und 2.9.

**Beispiel 3.9 :** *Der  $D_4$ -invariante Raum  $M_4^1$  ist nicht eindeutig bestimmt. Unter unendlich vielen Möglichkeiten sind z.B.*

$$\begin{aligned} M_4^1 &= \text{span}(x^4 + y^4, x^2y^2), \\ M_4^1 &= \text{span}(x^4 + y^4 + 3(x^2 + y^2), x^2y^2 + 5(x^2 + y^2) + 2), \\ M_4^1 &= K_4^1 = \text{span}(P^{4,0} + P^{0,4}, P^{2,2}), \end{aligned}$$

wobei  $P^{i,j}$  die Basis von  $K_k$  nach Jackson aus Paragraph 1.2 ist.

Ist  $G$  eine Gruppe mit  $h$  inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen, die reell sind oder zugehörige Charaktere hat, die nicht reellwertig sind, so gibt es analoge Zerlegungen. Faßt man  $M_j$  und die Teildarstellung  $\rho^{M_j}$  komplex auf, so gibt es eine komplexe kanonische Zerlegung

$$M_j^{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^h M_j^{i\mathbb{C}} \quad \text{mit} \quad M_j^{i\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N].$$

Faßt man die zueinander konjugierten Konglomerate zusammen, so ergibt sich eine reelle kanonische Zerlegung

$$M_j = \sum_{i=1}^l M_j^i \quad \text{mit} \quad M_j^i \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N].$$

Für  $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{C}[\underline{x}]$  gilt dann also

$$\mathbb{P}_k = M_0^{\mathbb{C}} + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^h M_j^{i\mathbb{C}} \quad \text{mit} \quad M_j^{i\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}[\underline{x}]$$

und für  $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$

$$\mathbb{P}_k = M_0 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l M_j^i \quad \text{mit} \quad M_j^i \subset \mathbb{R}[\underline{x}].$$

**Satz 3.10** : Sei  $G$  eine Gruppe mit der Eigenschaft, daß alle irreduziblen Darstellungen  $\rho^i, i = 1, \dots, h$  reell sind. Sei  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$  das Ideal der Polynome, die in den Knoten einer  $G$ -invarianten Kubaturformel vom Grad  $d$  verschwinden. Dann gibt es eine  $H$ -Basis

$$p_j^i \in V_i^{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N], \quad i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, m_i$$

aus  $d$ -orthogonalen Polynomen, wobei  $V_i^{\mathcal{A}}$  die Konglomerate aus der kanonischen Zerlegung

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^h V_i^{\mathcal{A}}$$

sind. Dann hat  $p_j^i$  vom Grad  $s$  folgende Darstellung:

$$p_j^i = q_{s,j}^i + \sum_{k=d-s+1}^{s-1} q_{k,j}^i \quad (3.2)$$

mit  $q_{s,j}^i \neq 0, q_{k,j}^i \in K_k^i \subset \mathbb{R}[\underline{x}], k = d - s + 1, \dots, s$ . Ist  $\rho^i$  eine mehrdimensionale, irreduzible Darstellung der Dimension  $n_i \geq 2$ , so können in der  $H$ -Basis die Polynome  $p_j^i, j = 1, \dots, \kappa n_i$  ( $m_i = \kappa n_i$ ) so gewählt werden, daß sie eine symmetriegerechte Basis bilden. Haben sie den Grad  $s$ , können sie also folgendermaßen gewählt werden: Sei

$$\begin{array}{ccc} Q_1^1 & \cdots & Q_{n_i}^1 \\ Q_1^2 & \cdots & Q_{n_i}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ Q_1^{c_i} & \cdots & Q_{n_i}^{c_i} \end{array}$$

eine symmetriegerechte Basis von  $\sum_{j=d-s+1}^s K_j^i$  (mit der Dimension  $n_i c_i$ ) mit der Eigenschaft, daß sie aus orthogonalen Polynomen besteht. Dann gibt es Koeffizienten  $a^{\mu\lambda} \in \mathbb{R}, \mu = 1, \dots, c_i, \lambda = 0, 1, \dots, \kappa - 1$  mit

$$p_{l+\lambda n_i}^i = \sum_{\mu=1}^{c_i} a^{\mu\lambda} Q_l^\mu \quad l = 1, \dots, n_i, \lambda = 0, \dots, \kappa - 1.$$

**Bemerkung 3.11** : Für Gruppen wie  $Ro_3$ , bei denen reelle, irreduzible Darstellungen und welche mit nichtreellem, zugehörigen Charakter auftreten, gilt der Satz analog.

BEWEIS: Nach Satz 3.7 kann die H-Basis eines  $G$ -invarianten Ideals  $\mathcal{A}$  so gewählt werden, daß  $p_j^i \in V_i^{\mathcal{A}}$  gilt. Nach Satz 1.3 ist  $p_j^i$   $d$ -orthogonal. Mögliche Darstellungen von  $d$ -orthogonalen Polynomen werden in Lemma 1.4 angegeben. Aus der kanonischen Zerlegung

$$\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_s = \sum_{i=1}^h V_i^{\mathcal{A}} \cap \mathbb{P}_s \quad \text{und} \quad V_i^{\mathcal{A}} \cap \mathbb{P}_s \subset \sum_{k=d-s+1}^s K_k^i$$

folgt dann Darstellung (3.2).

Nach Satz 3.7 kann die H-Basis so gewählt werden, daß sie einen  $G$ -invarianten Vektorraum erzeugt. Also erzeugen  $p_j^i, j = 1, \dots, \kappa n_i$  für festes  $i$  einen  $G$ -invarianten Raum. Für  $n_i \geq 2$  folgt aus den Eigenschaften der symmetriegerechten Basis, daß die Polynome  $p_j^i$  der H-Basis auch als symmetriegerechte Basis gewählt werden können. ■

Als nächstes werden 2 Beispiele mit Kubaturformeln mit minimaler Knotenzahl behandelt. Dann haben die Polynome in der H-Basis gleichen Grad. Der kompliziertere Ansatz für eine H-Basis mit Polynomen mit unterschiedlichem Grad wird im nächsten Paragraphen ausgeführt. Die notwendigen Bedingungen für die H-Basis, der Existenz von Syzygien (siehe Beispiel 1.9), wird erst im nächsten Paragraphen im Zusammenhang mit der  $G$ -Invarianz betrachtet. In den folgenden beiden Beispielen ist es aber wegen Satz 1.12 möglich, anhand der Anzahl der gemeinsamen Nullstellen von  $p_1, \dots, p_m$  zu entscheiden, ob  $p_1, \dots, p_m$  eine H-Basis von  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$  bilden.

**Beispiel 3.12 :** Um eine  $D_3$ -invariante Kubaturformel vom Grad 5 mit minimaler Knotenzahl 7 für  $T_2$  zu konstruieren, kann man nach Satz 1.14 die gemeinsamen Nullstellen von 3 linear unabhängigen, orthogonalen Polynomen  $p_1, p_2, p_3 \in K_3$  als Knoten wählen, wenn sie eine H-Basis bilden.

Nach Satz 3.10 kann man die 3 orthogonalen Polynome aus den Konglomeraten von  $D_3$  so wählen, daß sie einen dreidimensionalen,  $D_3$ -invarianten Vektorraum aufspannen. In Beispiel 3.2 wird erklärt, wie  $D_3$  auf  $\mathbb{R}[x, y]$  operiert.  $D_3$  hat 3 inäquivalente, irreduzible Darstellungen (siehe Paragraph 2.6 und 3.1).  $\mathbb{P}_3$  hat die kanonische Zerlegung  $\mathbb{P}_3 = V_1 + V_2 + V_3$ .  $K_3$  hat die kanonische Zerlegung  $K_3 = K_3^1 + K_3^2 + K_3^3$  mit  $K_3^i \subseteq V_i, i = 1, 2, 3$ .

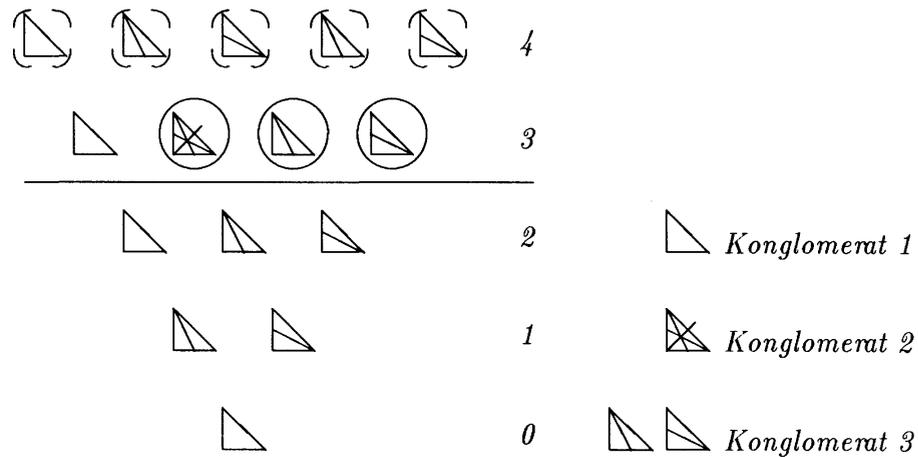


Abbildung 3.2:  $D_3$ -invariantes Ideal zugehörig zu  $T_2 : 5 - 1$  von Radon

Es gilt

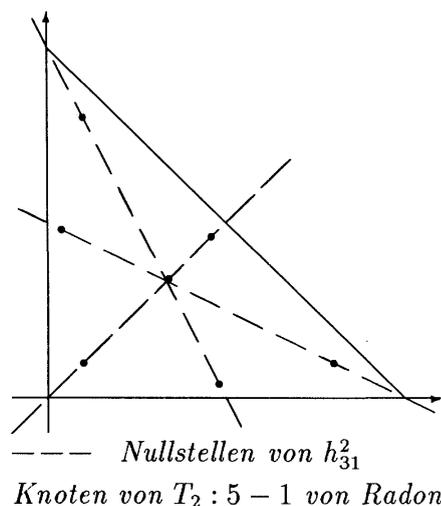
$$\begin{aligned}
 K_3^1 &= \text{span}(h_{31}^1), & h_{31}^1 &= P^{2,1} + P^{1,2}, \\
 K_3^2 &= \text{span}(h_{31}^2), & h_{31}^2 &= P^{3,0} - P^{0,3} + \frac{3}{2}(P^{2,1} - P^{1,2}), \\
 K_3^3 &= \text{span}(h_{31}^3, h_{32}^3), & h_{31}^3 &= P^{3,0} + P^{2,1} + P^{1,2}, \\
 & & h_{32}^3 &= P^{2,1} + P^{1,2} + P^{0,3},
 \end{aligned}$$

wobei  $P^{i,j}$  die Basis nach Jackson bezeichnet. Die Basis der Konglomerate wird berechnet mit Hilfe der Projektionen  $\Pi^i$  aus Satz 2.8 mit den Charakteren aus Tabelle 2.1 in Paragraph 2.6.

Es gibt also nach Satz 3.10 nur zwei sinnvolle Ansätze mit 3 Polynomen:

$$\begin{aligned}
 &h_{31}^1, h_{31}^3, h_{32}^3 \quad \text{oder} \\
 &h_{31}^2, h_{31}^3, h_{32}^3.
 \end{aligned}$$

Der erste Ansatz hat zu wenige gemeinsame Nullstellen und bildet also nach Satz 1.12 keine H-Basis. Der letzte Ansatz hat 7 gemeinsame Nullstellen und bildet also nach Satz 1.12 eine H-Basis, da das erzeugte Ideal fundamental vom Grad 4 ist. Die Nullstellen sind die Knoten der Formel  $T_2 : 5 - 1$  von Radon (Stroud [69]) vom Grad 5. Das Bild nebenan gibt die Lage der Knoten wieder und Abbildung 3.2 symbolisiert das zugehörige Ideal. Kreise stehen für Polynome aus der H-Basis, Umrandungen für andere Polynome aus dem Ideal.



**Beispiel 3.13** :  $D_4$ -invariante Formeln vom Grad 7 mit minimaler Knotenzahl 12 werden so konstruiert: Nach Satz 1.14 verwendet man die gemeinsamen Nullstellen von 3 linear unabhängigen, orthogonalen Polynomen vom Grad 4 als die Knoten einer Kubaturformel vom Grad 7, wenn sie eine H-Basis bilden und 12 reelle Nullstellen haben. Die Polynome spannen für eine  $D_4$ -invariante Formel einen  $D_4$ -invarianten Raum auf.

Nach Satz 3.10 setzt man mit Polynomen aus den Konglomeraten an. Die kanonische Zerlegung von  $K_4$  ist

$$K_4 = K_4^1 \oplus K_4^2 \oplus K_4^3 \oplus K_4^4$$

mit

$$\begin{aligned}
 K_4^1 &= \text{span}(h_{41}^1, h_{42}^1), & h_{41}^1 &= P^{4,0} + P^{0,4}, & h_{42}^1 &= P^{2,2}, \\
 K_4^2 &= \text{span}(h_{41}^2), & h_{41}^2 &= P^{3,1} - P^{1,3}, \\
 K_4^3 &= \text{span}(h_{41}^3), & h_{41}^3 &= P^{4,0} - P^{0,4}, \\
 K_4^4 &= \text{span}(h_{41}^4), & h_{41}^4 &= P^{3,1} + P^{1,3}
 \end{aligned}$$

( $P^{i,j}$  - Basis nach Jackson) (siehe Bild (3.1)). Die Basis der Konglomerate erhält man mittels der Projektionen  $\Pi^i$  aus Satz 2.8 mit den Charakteren aus Tabelle 2.3. Nach Satz 3.10 gibt es verschiedene Ansätze mit 3 Polynomen

aus den Konglomeraten:

$$\begin{aligned}
 h_{41}^2, h_{41}^3, h_{41}^4 &\longrightarrow (0, 0) \text{ ist mehrfache Nullstelle.} \\
 h_{41}^1, h_{42}^1, h_{41}^i, i = 2, 3, 4 &\longrightarrow \text{zuwenige gemeinsame Nullstellen.} \\
 h_{41}^1 + ah_{42}^1, h_{41}^2, h_{41}^3 &\longrightarrow \text{für } a = \frac{54}{55} \quad C_2 : 7 - 1([69]) \text{ von Tyler.} \\
 h_{41}^1 + bh_{42}^1, h_{41}^2, h_{41}^4 &\longrightarrow \text{für } b = \frac{27}{14} \quad C_2 : 7 - 2([69]) \text{ von Mysovskikh.} \\
 h_{41}^1 + ch_{42}^1, h_{41}^3, h_{41}^4 &\longrightarrow \text{zuwenige gemeinsame Nullstellen.}
 \end{aligned}$$

Die Parameter  $a, b$  kann man in diesem speziellen Fall dadurch bestimmen, daß man die gemeinsamen Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter berechnet und den Wert bestimmt, für den wirklich 12 gemeinsame Nullstellen vorliegen. Nach Satz 1.12 bilden die Polynome dann eine  $H$ -Basis und nach Satz 3.6 gibt es eine  $D_4$ -invariante Kubaturformel vom Grad 7 mit 12 Knoten. Grundsätzlich erhält man Gleichungen für die Parameter aus notwendigen Bedingungen dafür, daß die Polynome im Ansatz eine  $H$ -Basis bilden. Dazu wird die Existenz von Syzygien (siehe Paragraph 1.2 und 1.3) gefordert. Im nächsten Paragraphen wird darauf eingegangen, daß dabei die Symmetrie ausgenutzt werden kann.

Im nächsten Beispiel wird deutlich, daß der Ansatz der  $T$ -Methode (siehe Paragraph 1.2) für  $Z_2$ -invariante Formeln mit Satz 3.10 erklärt werden kann.

**Beispiel 3.14 :** Wie macht man einen Ansatz für ein Fundamentalsystem  $R_j$  vom Grad  $\nu + 1$  für eine Kubaturformel vom Grad  $2\nu - 1$  für ein  $Z_2$ -invariantes Integral  $I$ , so daß das Fundamentalsystem einen  $Z_2$ -invarianten Vektorraum bzw. ein  $Z_2$ -invariantes Ideal aufspannt? Nach Lemma 1.4 gilt  $R_j \in K_{\nu+1} + K_\nu + K_{\nu-1}$ .  $Z_2$  hat 2 irreduzible Darstellungen (Abschnitt 3.1). Für die kanonische Zerlegung gilt:

$$K_k = \begin{cases} K_k^1 & , \text{ falls } k \text{ gerade,} \\ K_k^2 & , \text{ falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Entweder gilt  $K_k^i = \{0\}$  oder  $K_k^i$  hat die Basis  $P^{k-j,j}, j = 0, \dots, k$  (nach Jackson). Da die  $R_j$  ein  $Z_2$ -invariantes Fundamentalsystem bilden sollen, ist nach Satz 3.10

$$R_j = P^{\nu+1-j,j} + \sum_{i=0}^{\nu-1} a_{ij} P^{\nu-1-i,i}, \quad j = 0, \dots, \nu + 1$$

ein sinnvoller Ansatz. Das ist der Ansatz für die  $T$ -Methode.

Das Beispiel zeigt, daß man für Gruppen mit kleiner Ordnung auch ohne lineare Darstellungen auf geeignete Ansätze für  $d$ -orthogonale Polynome kommt, deren gemeinsame Nullstellen die Knoten einer  $G$ -invarianten Kubaturformel bilden. Ist allerdings die Gruppenordnung größer oder die lineare Darstellung  $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{P}_k)$  unübersichtlich, so nützen Glück und Intuition nichts mehr.

### 3.3 Die Konstruktion von $G$ -invarianten Kubaturformeln mit Hilfe von linearen Darstellungen

Im letzten Paragraphen wurde gezeigt, daß man für eine H-Basis für ein  $G$ -invariantes Ideal mit Polynomen aus je einem Konglomerat ansetzen kann. In den Beispielen wurden Ansätze mit Polynomen vom gleichen Grad behandelt. Für Ansätze mit Polynomen von verschiedenem Grad sind zusätzliche Überlegungen erforderlich, auf die in diesem Paragraphen eingegangen wird.

Danach wird geklärt, wie man aus den notwendigen Bedingungen für die Eigenschaft der H-Basis unter Ausnutzung der Symmetrie auf Gleichungen für die Parameter im Ansatz kommt. Das vollständige Konstruktionsprinzip wird erläutert.

Für beides wird die multiplikative Struktur des  $G$ -invarianten Ideals im Zusammenhang mit der  $G$ -Invarianz untersucht, während in Paragraph 3.2 meistens nur die Struktur des Vektorraums des Ideals ausgenutzt wurde.

Angenommen  $\mathbb{P}_s \subset \mathbb{R}[x, y]$  hat die kanonische Zerlegung  $V_1 + V_2 + \dots + V_h$ . Seien  $p_1 \in V_i, p_2 \in V_j$  Polynome vom Grad  $s$ . Seien  $p_1$  und  $p_2$  die einzigen linear unabhängigen Polynome vom Grad  $\leq s$  im Ansatz für die H-Basis für ein  $G$ -invariantes Ideal. Ist  $p_3$  eine Linearkombination von  $p_1, xp_1, yp_1, p_2, xp_2, yp_2$  vom Grad  $s+1$  vom Symmetriotyp  $k$ , so ist es unsinnig, den Ansatz mit  $p_3 + p_4$  mit  $p_4 \in V_k$  zu ergänzen. Welche Symmetriotypen entstehen also bei der Multiplikation mit  $x$  und  $y$ ?

Sei  $E = \text{span}(p_1, \dots, p_m)$  ein  $G$ -invarianter Teilraum der Dimension  $m$  eines  $G$ -invarianten Ideals  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$ . Ist  $W = \text{span}(q_1, \dots, q_k) \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$  ein  $G$ -invarianter Vektorraum der Dimension  $k$ . Dann ist auch

$$U = W \odot E := \text{span}(\{q_\nu p_j \mid \nu = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, m \})$$

ein  $G$ -invarianter Teilraum von  $\mathcal{A}$ . Das folgt aus

$$\rho(t)(q_\nu p_j) = \rho(t)(q_\nu) \cdot \rho(t)(p_j) = \rho^W(t)(q_\nu) \cdot \rho^E(t)(p_j)$$

$\forall t \in G, \nu = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m$ . Ein Vergleich mit dem Kronecker-Produkt (Definition 2.10) der Teildarstellungen  $\rho^W$  und  $\rho^E$ , das durch

$$\rho^W \times \rho^E : G \longrightarrow GL(W \times E)$$

$$(\rho^W \times \rho^E)(t)(q_\nu \otimes p_j) = \rho^W(t)(q_\nu) \otimes \rho^E(t)(p_j)$$

$\forall t \in G, \nu = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m$  gegeben ist, läßt die Ähnlichkeit der Darstellungen  $\rho^U$  und  $\rho^W \times \rho^E$  erkennen.  $W \times E$  hat die Dimension  $k \cdot m$ . Es gilt für den zugehörigen Charakter  $\chi^{W \times E} = \chi^W \cdot \chi^E$ . Die Bedeutung des Charakters liegt darin, daß man die volle Ausreduktion daran ablesen kann.

Hat  $U = W \odot E$  ebenfalls die Dimension  $k \cdot m$ , so sind die Darstellungen  $\rho^U$  und  $\rho^W \times \rho^E$  äquivalent. Damit haben sie die gleiche volle Ausreduktion und den gleichen Charakter. Für  $\dim U = k \cdot m$  gilt also

$$\chi^U = \chi^W \cdot \chi^E.$$

Hat  $G$   $h$  paarweise inäquivalente, irreduzible Darstellungen  $\rho^i$  mit zugehörigen Charakteren  $\chi^i, i = 1, \dots, h$ , so gibt es nach Satz 2.6 Vielfachheiten  $c_i^W, c_i^E, i = 1, \dots, h$  mit

$$\chi^W = \sum_{i=1}^h c_i^W \chi^i, \quad \chi^E = \sum_{i=1}^h c_i^E \chi^i.$$

Für den Charakter der Darstellung auf  $U$  gilt dann also

$$\chi^U = \chi^W \cdot \chi^E = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h c_i^W c_j^E \chi^i \chi^j.$$

Die Darstellung der Charakterprodukte  $\chi^i \chi^j$  als Linearkombination von  $\chi^i$  findet man für einige wichtige Gruppen in Abschnitt 2.6. Falls also  $\dim U = k \cdot m$  gilt, lassen sich die Vielfachheiten  $c_i^U$  in der vollen Ausreduktion der Teildarstellung  $\rho^U$  also leicht berechnen. Es kann aber auch der Fall  $\dim U < k \cdot m$  eintreten. Für  $E = W = \text{span}(x, y)$  gilt z.B.  $U = W \odot E = \text{span}(x^2, xy, y^2)$ . Für solche Fälle lassen sich mit der folgenden Definition noch Aussagen gewinnen.

**Definition 3.15** :  $G$  habe  $h$  inäquivalente, irreduzible Darstellungen  $\rho^i, i = 1, \dots, h$  mit zugehörigen Charakteren  $\chi^i$ . Für 2 Teildarstellungen  $\rho^W$  und  $\rho^V$  mit den vollen Ausreduktionen

$$\rho^W = \sum_{i=1}^h c_i^W \rho^i \text{ und } \rho^V = \sum_{i=1}^h c_i^V \rho^i$$

mit den zugehörigen Charakteren

$$\chi^W = \sum_{i=1}^h c_i^W \chi^i \text{ und } \chi^V = \sum_{i=1}^h c_i^V \chi^i$$

sei  $\rho^W \leq \rho^V$  bzw.  $\chi^W \leq \chi^V$  durch

$$c_i^W \leq c_i^V \quad \forall i = 1, \dots, h$$

definiert.

**Satz 3.16** : Sei  $G$  eine Gruppe mit  $h$  inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen mit zugehörigen Charakteren  $\chi^i, i = 1, \dots, h$ . Seien  $W, E \subset \mathbb{R}[x]$   $G$ -invariante Polynomräume der Dimension  $k$  bzw.  $m$ . Seien  $\chi^W, \chi^E$  die zu den Teildarstellungen  $\rho^W, \rho^E$  zugehörigen Charaktere. Dann gilt für den  $G$ -invarianten Raum  $U = W \odot E$  mit zugehöriger Teildarstellung  $\rho^U$  mit Charakter  $\chi^U$

$$\chi^U \leq \chi^W \cdot \chi^E.$$

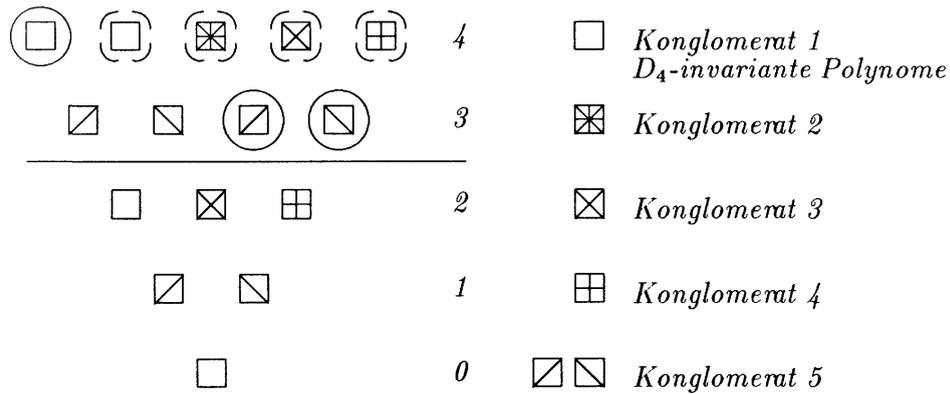
Hat  $U$  die Dimension  $k \cdot m$ , so gilt  $\chi^U = \chi^W \chi^E$ .

BEWEIS:  $U$  ist  $G$ -invariant und es gilt  $\dim U \leq k \cdot m$ . ■

In folgendem Beispiel wird ein Ansatz für eine H-Basis für eine  $D_4$ -invariante Formel mit Polynomen vom Grad 3 und 4 gemacht.

**Beispiel 3.17** : Nach Satz 1.13 ist die minimale Knotenzahl 7 für eine Kubaturformel vom Grad 5 für  $C_2$ . Ist eine Kubaturformel vom Grad 5 zusätzlich  $D_4$ -invariant, so hat sie mindestens 8 Knoten. Nach Satz 3.10 können die Polynome im Ansatz für die H-Basis aus den Konglomeraten von  $K_3$  und vom Grad 4 wegen Lemma 1.4 aus den Konglomeraten von  $K_4 + K_3 + K_2$  gewählt werden. Die kanonische Zerlegung  $K_4^1 \oplus K_4^2 \oplus K_4^3 \oplus K_4^4$  findet man in Beispiel 3.13. Es gilt

$$K_3 = K_3^5 = \text{span}(h_{31}^5, h_{32}^5, h_{33}^5, h_{34}^5) \text{ mit}$$

Abbildung 3.3:  $D_4$ -invariantes Ideal zu  $C_2 : 5 - 3$  von Burnside

$$\begin{aligned} h_{31}^5 &= P^{3,0}, & h_{32}^5 &= P^{0,3}, \\ h_{33}^5 &= P^{2,1}, & h_{34}^5 &= P^{1,2}, \end{aligned}$$

die eine symmetriegerechte Basis bilden. Weiterhin gilt  $K_2 = K_2^1 \oplus K_2^3 \oplus K_2^4$  mit

$$\begin{aligned} K_2^1 &= \text{span}(h_{21}^1) & \text{mit } h_{21}^1 &= P^{2,0} + P^{0,2}, \\ K_2^3 &= \text{span}(h_{21}^3) & \text{mit } h_{21}^3 &= P^{2,0} - P^{0,2}, \\ K_2^4 &= \text{span}(h_{21}^4) & \text{mit } h_{21}^4 &= P^{1,1}. \end{aligned}$$

Eine VR-Basis von  $K_3$  ist keine H-Basis nach Satz 1.12, weil sie nur  $(0, 0)$  als gemeinsame Nullstelle haben. Außer  $K_3$  und  $\{0\}$  gibt es nur zweidimensionale,  $D_4$ -invariante Unterräume. Da  $h_{31}^5, h_{32}^5, h_{33}^5, h_{34}^5$  eine symmetriegerechte Basis bilden, ist

$$E := \text{span}(h_{31}^5 + ah_{33}^5, h_{32}^5 + ah_{34}^5)$$

für alle  $a \in \mathbb{R}$  ein zweidimensionaler,  $D_4$ -invarianter Raum. Durch  $xp, yp$  mit  $p \in E$  erhält man einen  $D_4$ -invarianten Raum, dessen homogene Terme vom Grad 4 einen vierdimensionalen Raum aufspannen.

Mit einem weiterem Polynom vom Grad 4 mit unabhängigem, homogenem Term vom Grad 4 erhält man ein Fundamentalsystem. Sei  $M = \text{span}(x, y)$ . Die volle Ausreduktion von  $M \odot E$  läßt sich an den Charakteren ablesen. Nach Satz 3.16 gilt

$$\chi^{M \odot E} = \chi \cdot \chi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4,$$

wobei die Bezeichnungen der Charaktere mit Abschnitt 2.6 übereinstimmen und die Produkttabelle 2.4 verwendet wurde. Wegen

$$\chi^{K_4} = 2\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4$$

ist es sinnvoll ein weiteres Polynom für die H-Basis aus  $K_4^1 + K_2^1$  vom Grad 4 zu wählen.

$$h_{31}^5 + ah_{33}^5, \quad h_{32}^5 + ah_{34}^5, \quad h_{42}^1 + bh_{21}^1$$

ist also ein sinnvoller Ansatz. Da das erzeugte Ideal  $\mathcal{A}$  fundamental vom Grad 4 ist, gilt für die Hilbertfunktion  $H(4, \mathcal{A}) = H(k, \mathcal{A}) \forall k \geq 5$ . Es gilt  $H(4, \mathcal{A}) \leq 8$ . Für bestimmte  $a, b \in \mathbb{R}$  gibt es 8 reelle gemeinsame Nullstellen. Nach Satz 1.12 bilden die Polynome dann eine H-Basis und es gibt nach Satz 3.6 eine  $D_4$ -invariante Kubaturformel vom Grad 5 mit diesen Nullstellen als Knoten. Das ist die Formel  $C_2 : 5 - 3$  (Stroud [69]) von Burnside. Die Bestimmung der Parameter  $a, b$  kann aus den notwendigen Bedingungen für die H-Basis nach Satz 3.19 erfolgen. Burnside [5] selbst hat als Hinweis auf die Konstruktion nur die Konstruktion von Gaußformeln für eindimensionale Integrale mit Hilfe von orthogonalen Polynomen angegeben.

Im vorherigen Paragraphen und zu Beginn dieses Paragraphen wurde erläutert, wie man einen Ansatz für eine H-Basis eines  $G$ -invarianten Ideals macht, dessen Nullstellen als die Knoten einer  $G$ -invarianten Kubaturformel vom Grad  $d$  verwendet werden können. Die Ansatzpolynome  $p_j^i, i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, m_i$  der H-Basis hängen dabei von Parametern ab. In Paragraph 1.2 wurde auf den engen Zusammenhang zwischen einer H-Basis  $p_1, \dots, p_m$  und Syzygien (nichttriviale Darstellungen des Nullpolynoms  $\sum_{j=1}^m g_j p_j = 0, g_j \in \mathbb{R}[\underline{x}]$ ) hingewiesen.

Fordert man für einen parameterabhängigen Ansatz für eine H-Basis, die Existenz von Syzygien mit  $\text{Grad}(g_j) \leq 1$  oder 2 (oder dazu äquivalente Bedingungen), so ergeben sich daraus Gleichungen für die Parameter. Auch hier kann man die  $G$ -Invarianz ausnutzen. Sei  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$  ein  $G$ -invariantes Ideal. Sei  $E := \text{span}(p_1, \dots, p_m)$  ein  $G$ -invarianter Raum der Dimension  $m$ . Sei weiterhin  $M \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$  ein  $G$ -invarianter Unterraum der Dimension  $k$ . Dann kann man auch auf einem Unterraum des Syzygienraumes

$$Y := \{(g_1, \dots, g_m) \in M^m \mid \sum_{j=1}^m g_j p_j = 0\}$$

eine lineare Darstellung  $\vartheta : G \longrightarrow GL(Y)$  einführen, wobei  $\vartheta(t)$  durch  $\rho(t)$  gegeben ist, denn mit

$$\sum_{j=1}^m g_j p_j = 0 \quad \text{gilt auch} \quad \sum_{j=1}^m \rho(t)(g_j) \rho(t)(p_j) = 0.$$

Weil  $E$  ein  $G$ -invarianter Raum ist, läßt sich  $\rho(t)(p_j)$  durch  $p_1, \dots, p_m$  darstellen, was die  $G$ -Invarianz des Syzygienuntertraumes  $Y$  zeigt.

Betrachte die Zusammenhänge der vollen Ausreduktionen. Sei

$$\begin{aligned} \chi^E &= c_1^E \chi^1 + \dots + c_h^E \chi^h, \\ \chi^M &= c_1^M \chi^1 + \dots + c_h^M \chi^h, \\ \chi^Y &= c_1^Y \chi^1 + \dots + c_h^Y \chi^h. \end{aligned}$$

**Satz 3.18** : *Unter obigen Voraussetzungen gilt*

$$\chi^{M \odot E} + \chi^Y = \chi^M \cdot \chi^E.$$

BEWEIS:  $M \odot E$  und  $Y$  sind  $G$ -invariant. Es gilt

$$\dim M \times E = k \cdot m = \dim M \odot E + \dim Y. \blacksquare$$

Wenn  $p_1, \dots, p_m$  eine H-Basis bilden und das Ideal  $\mathcal{A}$  nulldimensional ist, also ein Fundamentalsystem enthält, ist über die Dimension und die volle Ausreduktion von  $M \odot E$  mehr bekannt. Dann kennt man also die volle Ausreduktion von  $Y$ , was für die Konstruktion einer H-Basis eines  $G$ -invarianten Ideals ausgenutzt werden kann.

**Satz 3.19** : *Seien  $p_1, \dots, p_m$  linear unabhängige Polynome vom gleichen Grad  $\nu$ , die eine H-Basis von  $\mathcal{A}$  bilden. Seien der Vektorraum  $E := \text{span}(p_1, \dots, p_m)$  und das Ideal  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$   $G$ -invariant. Sei  $M := \mathbb{P}_k$ ,  $A := \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_{\nu+k-1}$ ,  $B$  ein  $G$ -invariantes, direktes Komplement von  $A$  in  $\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_{\nu+k}$ :  $\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_{\nu+k} = A \oplus B$ . Sei*

$$Y := \{(g_1, \dots, g_m) \in M^m \mid \sum_{j=1}^m g_j p_j = 0\}.$$

Dann gilt

$$\chi^M \cdot \chi^E = \chi^A + \chi^B + \chi^Y.$$

**Bemerkung 3.20** : Falls die Polynome  $p_1, \dots, p_m$  unterschiedlichen Grad haben, gibt es eine analoge Formulierung von Satz 3.19.

Seien  $p_1, \dots, p_m$  linear unabhängige Polynome vom Grad  $\nu$ , wobei auch die homogenen Anteile vom Grad  $\nu$  in  $p_1, \dots, p_m$  linear unabhängig seien. Die Polynome können von Parametern abhängen, die so bestimmt werden sollen, daß  $p_1, \dots, p_m$  eine H-Basis bilden. Für  $E := \text{span}(p_1, \dots, p_m)$  und  $M := \mathbb{P}_k$  sind die Charaktere  $\chi^E$  und  $\chi^M$  bekannt.  $\chi^E \cdot \chi^M$  wird daraus leicht mit einer Charakterprodukttable berechnete. In vielen Fällen kennt man  $\chi^A$  und  $\chi^B$  für diejenigen Parameterwerte, für die  $p_1, \dots, p_m$  tatsächlich eine H-Basis bilden. Wenn z. B.  $M \odot E$  ein Fundamentalsystem vom Grad  $\nu + k$  enthält, gilt  $\chi^B = \chi^{K_{\nu+k}}$ . Falls sich für  $M = \mathbb{P}_{k-1}$  keine notwendigen Bedingungen für die H-Basis ergeben haben, gilt  $A = E \odot \mathbb{P}_{k-1}$ . Nach Satz 3.19 kennt man  $\chi^Y$  und damit die volle Ausreduktion des Syzygienraumes  $Y$ . Für  $c_i^Y > 0$  berechnet man eine Basis des  $i$ -ten Konglomerates von  $M \odot E$  so, daß eine Basis des  $i$ -ten Konglomerates von  $E$  ergänzt wird zu einer Basis des  $i$ -ten Konglomerates von  $E \odot \mathbb{P}_1$ . So geht man weiter vor, bis die Basis des  $i$ -ten Konglomerates von  $E \odot \mathbb{P}_{k-1}$  zu einer Basis des  $i$ -ten Konglomerates von  $E \odot \mathbb{P}_k$  ergänzt wird. Jede Linearkombination  $Q_j^i$  davon vom Grad  $\leq \nu - 1$  (bzw. vom Grad  $\leq \nu + k - 1$  ohne homogene Anteile vom Grad  $\nu, \dots, \nu + k - 1$  von Polynomen aus dem  $i$ -ten Konglomerat von  $\mathbb{P}_{k-1} \odot E$ ) muß bereits eine Darstellung des Nullpolynoms (also eine Syzygie) sein. Das ergibt die Gleichungen für die Parameter.

Praktisch berechnet man die Linearkombinationen  $Q_j^i$  durch systematische Gradreduktion. Zuerst bildet man Linearkombinationen  $\tilde{Q}_j^i$  aus den Basis-Polynomen vom Grad  $\nu + k$  im  $i$ -ten Konglomerat von  $M \odot E$ , so daß  $\tilde{Q}_j^i$  den Grad  $\leq \nu + k - 1$  hat. Danach berechnet man Linearkombinationen von  $\tilde{Q}_j^i$  und den restlichen Basis-Polynomen aus dem  $i$ -ten Konglomerat von  $E \odot \mathbb{P}_{k-1}$  von möglichst niedrigem Grad.

Die Anzahl der Gleichungen hängt von  $c_i^Y, i, k$  und den Anforderungen an die Orthogonalität der  $p_1, \dots, p_m$  ab und kann im voraus berechnet werden. Das wird in Paragraph 5.2 ausgeführt.

**Konstruktion von  $G$ -invarianten Kubaturformeln vom Grad  $d$ :**

- 1.) Man macht nach Satz 3.10 einen parameterabhängigen Ansatz für eine H-Basis

$$p_j^i, \quad i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, m_i$$

mit linear unabhängigen,  $d$ -orthogonalen Polynomen aus den Konglomeraten  $V_i$ , so daß die homogenen Terme in  $p_j^i$  jeweils vom Höchstgrad auch linear unabhängig sind und das erzeugte Ideal  $\mathcal{A}$  nulldimensional ist.

- 2.)  $\chi^A$  und  $\chi^B$  werden berechnet, z.B. gilt

$$\chi^A = \chi^E \chi^{\mathbf{P}^{k-1}}, \quad \chi^B = \chi^{K_{\nu+k}},$$

falls ein Fundamentalsystem vom Grad  $\nu+k$  existiert und sich für  $k-1$  keine notwendigen Bedingungen für die H-Basis ergeben haben.

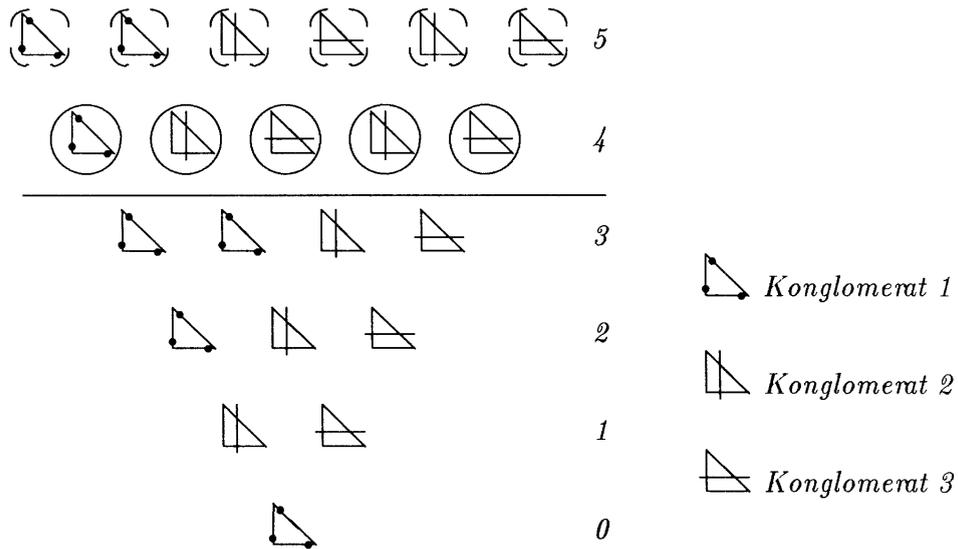
- 3.)  $\chi^Y = c_1^Y \chi^1 + \dots + c_h^Y \chi^h$  wird berechnet. Der Ansatz wird verworfen, wenn die Anzahl der Gleichungen für die Parameter zu groß ist. Ansonsten weiter mit 4.).
- 4.) Für  $i = 1, \dots, h$ ,  $j = 1, \dots, c_i^Y$  berechnet man linear unabhängige  $Q_j^i \in M \odot E \cap V_i$  vom Grad  $\leq \nu - 1$  (bzw. vom Grad  $\leq \nu + k - 1$  ohne homogene Anteile vom Grad  $\nu, \dots, \nu + k - 1$  von Polynomen aus  $E \odot \mathbb{P}_{k-1}$ ), wobei das Wissen über die Konglomerate  $i$  ausgenutzt wird.
- 5.) Gleichungen für die Parameter ergeben sich aus

$$Q_j^i = 0, \quad i = 1, \dots, h, \quad j = 1, \dots, c_i^Y.$$

Falls notwendig werden die Schritte 2.) - 5.) für  $k+1$  statt mit  $k$  wiederholt.

- 6.) Die Parametergleichungen werden gelöst. Falls keine reelle Lösung vorhanden ist, wird abgebrochen.
- 7.) Man berechnet die gemeinsamen Nullstellen von  $p_j^i, i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, m_i$ . Abbruch, falls sie komplex, vielfach oder zu wenige sind.
- 8.) Durch ein lineares Gleichungssystem werden die Gewichte bestimmt.

Die Gleichungen  $Q_j^i = 0$  aus Schritt 5.) sind nur notwendige Bedingungen dafür, daß die Polynome  $p_j^i$  eine H-Basis bilden. Eine notwendige und hinreichende Bedingung ergibt sich aus Satz 1.12 (bzw. einer Verallgemeinerung davon) aus der Anzahl der gemeinsamen Nullstellen. Deshalb wird der Ansatz in Schritt 7.) bei zu wenigen gemeinsamen Nullstellen verworfen.

Abbildung 3.4:  $Ro_3$ -invarianter Ansatz für  $d = 6, n = 10$ **Beispiel 3.21 :**

Es wird gezeigt, daß es keine  $Ro_3$ -invariante Kubaturformel vom Grad 6 mit 10 Knoten fürs Dreieck  $T_2$  gibt. Für  $Ro_3$  ergeben sich die kanonischen Zerlegungen

$$K_4^{\mathbb{C}} = K_4^{1\mathbb{C}} \oplus K_4^{2\mathbb{C}} \oplus K_4^{3\mathbb{C}},$$

$$K_3^{\mathbb{C}} = K_3^{1\mathbb{C}} \oplus K_3^{2\mathbb{C}} \oplus K_3^{3\mathbb{C}} \quad \text{mit}$$

$$K_4^{1\mathbb{C}} = \text{span}(h_{41}^1),$$

$$K_4^{2\mathbb{C}} = \text{span}(h_{41}^2, h_{42}^2),$$

$$K_4^{3\mathbb{C}} = \text{span}(h_{41}^3, h_{42}^3), \quad \text{mit } h_{41}^2 = \overline{h_{41}^3}, h_{42}^2 = \overline{h_{42}^3}$$

$$K_3^{1\mathbb{C}} = \text{span}(h_{31}^1, h_{32}^1),$$

$$K_3^{2\mathbb{C}} = \text{span}(h_{31}^2),$$

$$K_3^{3\mathbb{C}} = \text{span}(h_{31}^3) \quad \text{mit } h_{31}^2 = \overline{h_{31}^3}.$$

Falls die Formel existiert, sind die Knoten die gemeinsamen Nullstellen eines

Fundamentalsystems vom Grad 4 aus 6-orthogonalen Polynomen:

$$\begin{aligned} p_1^1 &= h_{41}^1 + eh_{31}^1 + fh_{32}^1, \\ p_1^2 &= h_{41}^2 + (a + bi)h_{31}^2, \\ p_2^2 &= h_{42}^2 + (c + di)h_{31}^2, \\ p_1^3 &= h_{41}^3 + (a - bi)h_{31}^3, \\ p_2^3 &= h_{42}^3 + (c - di)h_{31}^3. \end{aligned}$$

$p_1^1, p_1^2 + p_1^3, i(p_1^2 - p_1^3), p_2^2 + p_2^3, i(p_2^2 - p_2^3)$  spannen in Abhängigkeit von  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$  einen  $Ro_3$ -invarianten, reellen Vektorraum  $E$  auf. Das sind alle Möglichkeiten für ein Fundamentalsystem vom Grad 4 für eine  $Ro_3$ -invariante Kubaturformel.

Bei 10 Knoten ist  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  ein Knoten, also Nullstelle. Wenn man den Parameter  $e$  geeignet festlegt, haben die Ansatzpolynome  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  als gemeinsame Nullstelle.  $\mathbb{P}_1$  hat die volle Ausreduktion  $\rho^1 + \rho^2 + \rho^3$  mit  $g_1 = 1$  und  $g_2, g_3$  aus den Konglomeraten 2 und 3. Es gilt  $A = E$  mit  $\chi^A = \psi_1 + 2\psi_2 + 2\psi_3$ . Weiterhin gilt  $\chi^B = \chi^{K_5} = 2\psi_1 + 2\psi_2 + 2\psi_3$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \chi^Y &= \chi^M \chi^E - \chi^A - \chi^B \\ &= 5\psi_1 + 5\psi_2 + 5\psi_3 - (\psi_1 + 2\psi_2 + 3\psi_3) - (2\psi_1 + 2\psi_2 + 2\psi_3) \\ &= 2\psi_1 + \psi_2 + \psi_3. \end{aligned}$$

Es sind also 2 Syzygien vom Typ 1 und eine vom Typ 2 zu konstruieren. Die vom Typ 3 ergibt sich durch Konjugation. Man bildet aus

$$p_1^1, \quad g_2 p_1^3, \quad g_2 p_2^3, \quad g_3 p_1^2, \quad g_3 p_2^2$$

derartige Linearkombinationen, daß sich die führenden Monome vom Grad 5 und 4 wegheben. Das ergibt 2 linear unabhängige Polynome  $Q_1^1, Q_2^1 \in K_3^1 + K_2^1$  vom Grad 3. Das gleiche macht man mit

$$g_2 p_1^1, \quad g_3 p_3^1, \quad g_3 p_3^2, \quad p_2^1, \quad p_2^2.$$

Das ergibt  $Q_1^2 \in K_3^2 + K_2^2$ . Aus  $Q_1^1 = 0, Q_2^1 = 0, Q_1^2 = 0$  erhält man einfache quadratische Gleichungen für  $a, b, c, d, f \in \mathbb{R}$ , die aber nur Lösungen haben, die nicht reell sind. Also gibt es keine  $Ro_3$ -invariante Kubaturformel vom Grad 6 mit 10 Knoten für  $T_2$ . Auch für  $E_{r^2}$  existiert keine Formel dieses Typs.

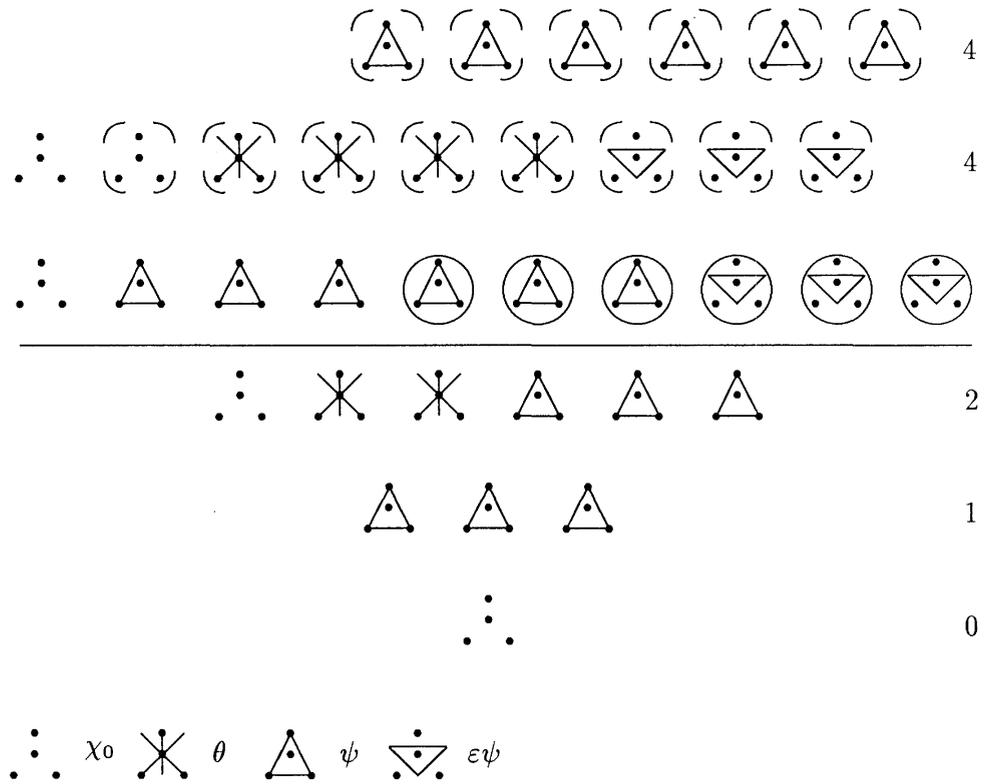


Abbildung 3.5: Ansatz für  $S_4$ -invariante Formeln vom Grad 5 für  $T_3$

**Beispiel 3.22** : In diesem Beispiel werden Kubaturformeln für  $T_3$  vom Grad 5 konstuiert, die  $S_4$ -invariant sind und 15 Knoten haben. Nach Paragraph 2.6 hat  $S_4$  5 irreduzible Darstellungen mit den Charakteren  $\chi_0, \varepsilon, \theta, \psi, \varepsilon\psi$ . Für den Charakter zur Teildarstellung von  $\rho$  auf  $K_4$  bzw.  $K_3$  gilt

$$\begin{aligned}\chi^{K_4} &= 2 \cdot \chi_0 + 2 \cdot \theta + 2 \cdot \psi + \varepsilon\psi, \\ \chi^{K_3} &= \chi_0 + 2 \cdot \psi + \varepsilon\psi.\end{aligned}$$

Für die Konglomerate in der kanonischen Zerlegung

$$K_3 = K_3^1 + K_3^4 + K_3^5 \quad \text{gilt}$$

$$\begin{aligned}K_3^5 &= \text{span}(h_{31}^5, h_{32}^5, h_{33}^5), \\ K_3^4 &= \text{span}(h_{31}^4, h_{32}^4, h_{33}^4, h_{34}^4, h_{35}^4, h_{36}^4),\end{aligned}$$

mit

$$h_{31}^5 = P^{3,0,0} + 2P^{2,1,0} - 2P^{1,2,0} - P^{0,3,0} + P^{2,0,1} + P^{0,2,1} + P^{1,0,2} - P^{0,2,1},$$

$$\begin{aligned}h_{32}^5(x, y, z) &= h_{31}^5(y, x, z), \\ h_{33}^5(x, y, z) &= h_{31}^5(z, y, x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_{31}^4 &= +P^{3,0,0} + P^{0,0,3} + q + 3 \cdot P^{1,1,1}, \\ h_{32}^4 &= -P^{3,0,0} - P^{0,3,0} - q - 3 \cdot P^{1,1,1}, \\ h_{33}^4 &= -P^{0,3,0} - P^{0,0,3} - q - 3 \cdot P^{1,1,1}, \\ h_{34}^4 &= -P^{2,1,0} - P^{1,2,0} - P^{0,2,1} - P^{0,1,2} + P^{2,0,1} + P^{1,0,2} - 2 \cdot P^{1,1,1}, \\ h_{35}^4 &= -P^{2,1,0} - P^{1,2,0} + P^{0,2,1} + P^{0,1,2} + P^{2,0,1} + P^{1,0,2} + 2 \cdot P^{1,1,1}, \\ h_{36}^4 &= +P^{2,1,0} + P^{1,2,0} - P^{0,2,1} - P^{0,1,2} + P^{2,0,1} + P^{1,0,2} + 2 \cdot P^{1,1,1},\end{aligned}$$

$$\text{wobei } q = \frac{3}{2}(P^{2,1,0} + P^{1,2,0} + P^{0,2,1} + P^{0,1,2} + P^{2,0,1} + P^{1,0,2}) \quad \text{gilt.}$$

Dabei bilden  $h_{3j}^4, j = 1, \dots, 6$  eine symmetriegerechte Basis bzgl. der Darstellungsmatrizen in Stiefel und Fässler [67] S. 118f. Die Indizes sind so gewählt, daß  $h_{3j}^4, j = 1, 2, 3$  einen  $S_4$ -invarianten Raum aufspannen. Ein sinnvoller Ansatz für eine  $H$ -Basis ist

$$h_{31}^4 + \lambda h_{34}^4, \quad h_{32}^4 + \lambda h_{35}^4, \quad h_{33}^4 + \lambda h_{36}^4, \quad h_{31}^5, \quad h_{32}^5, \quad h_{33}^5,$$

die für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  einen 6-dimensionalen,  $S_4$ -invarianten Raum  $E$  aufspannen (siehe Bild 3.5). Es gilt  $A = E$  mit Charakter

$$\chi^A = \chi^E = \psi + \varepsilon\psi.$$

Für  $M = \mathbb{P}_1$  gilt  $\chi^M = \chi_0 + \psi$ , also nach Tabelle 2.6

$$\chi^M \cdot \chi^E = \chi_0 + \varepsilon + 2\theta + 3\psi + 3\varepsilon\psi.$$

Für  $M_1 = \text{span}(x - 0.25, y - 0.25, z - 0.25)$  mit zugehörigem Charakter  $\chi^{M_1} = \psi$  gilt

$$\chi^{M_1} \cdot \chi^E = \psi \cdot (\psi + \varepsilon\psi) = \chi_0 + \varepsilon + 2\theta + 2\psi + 2\varepsilon\psi.$$

Wegen  $\chi^{K_4} = 2\chi_0 + 2\theta + 2\psi + \varepsilon\psi$  enthält  $M_1 \odot E$  einen  $S_4$ -invarianten Unterraum von Polynomen vom Grad 4 mit Charakter  $\chi_0 + 2\theta + 2\psi + \varepsilon\psi$ . Falls die Ansatzpolynome von  $\mathcal{A}$  eine  $H$ -Basis bilden, gilt für ein  $G$ -invariantes, direktes Komplement  $B$  von  $A$  in  $\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_4$

$$\chi^B = \chi_0 + 2\theta + 2\psi + \varepsilon\psi$$

und damit nach Satz 3.19

$$\chi^Y = \chi^M \cdot \chi^E - \chi^A - \chi^B = \varepsilon + \varepsilon\psi.$$

Wegen  $M \odot E \subset K_4 + K_3 + K_2$  und  $\chi^E = \psi + \varepsilon\psi$  folgt die Existenz von 4 Syzygien für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit zugehörigen Charakteren  $\varepsilon$  und  $\varepsilon\psi$ , weil Polynome vom Symmetriotyp 5 erst vom Grad 3 und ein Polynom vom Symmetriotyp 2 sogar erst ab dem Grad 6 auftreten. Da ein Fundamentalsystem vom Grad 5 existiert, gilt  $H(5, \mathcal{A}) \leq 15$ . Tatsächlich haben die Polynome aus dem Ansatz 15 gemeinsame Nullstellen:

$$\begin{array}{ll} (x_1, & x_1, & x_1; & 1 - 3x_1)_{S_4} & \text{mit} & x_1 = \frac{1}{8} \left( \frac{2\lambda - 11}{2\lambda - 7} + \sqrt{\frac{(-2\lambda + 11)(2\lambda + 21)}{7(2\lambda - 7)^2}} \right) \\ (x_2, & x_2, & x_2; & 1 - 3x_2)_{S_4} & & x_2 = \frac{1}{8} \left( \frac{2\lambda - 11}{2\lambda - 7} - \sqrt{\frac{(-2\lambda + 11)(2\lambda + 21)}{7(2\lambda - 7)^2}} \right) \\ (x_3, & x_3, & 0.5 - x_3; & 0.5 - x_3)_{S_4} & & x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda + 3}{14(2\lambda + 1)}} \\ \left( \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \right) & & & \end{array}$$

Für  $\lambda \in \left(-\frac{21}{2}, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right) \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$  sind alle Nullstellen reell (siehe Bild 3.6).

Mit Verallgemeinerung von Satz 1.12 folgt, daß dann die Polynome eine  $H$ -Basis bilden. Es existieren also nach Satz 3.6  $S_4$ -invariante Kubaturformeln vom Grad 5 mit den 15 Nullstellen als Knoten. Auf anderem Rechenwege

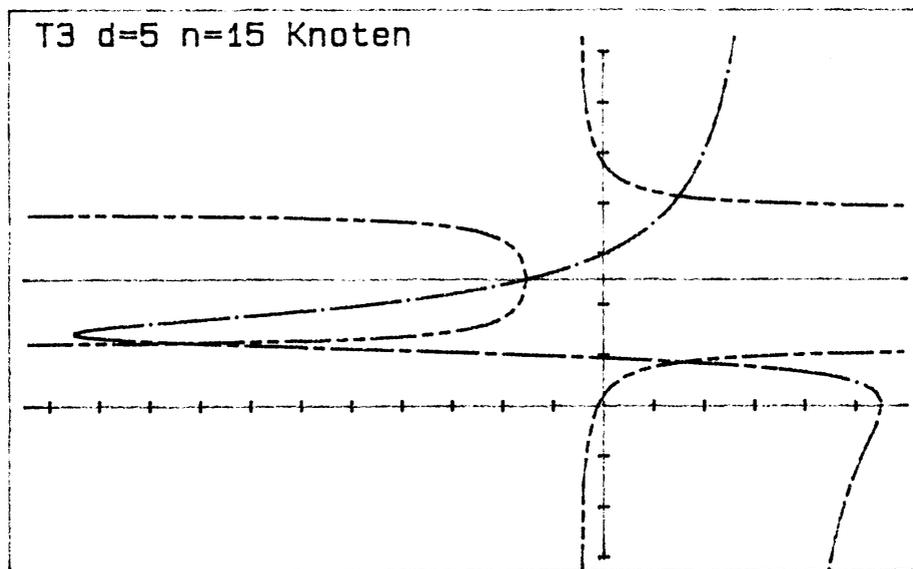
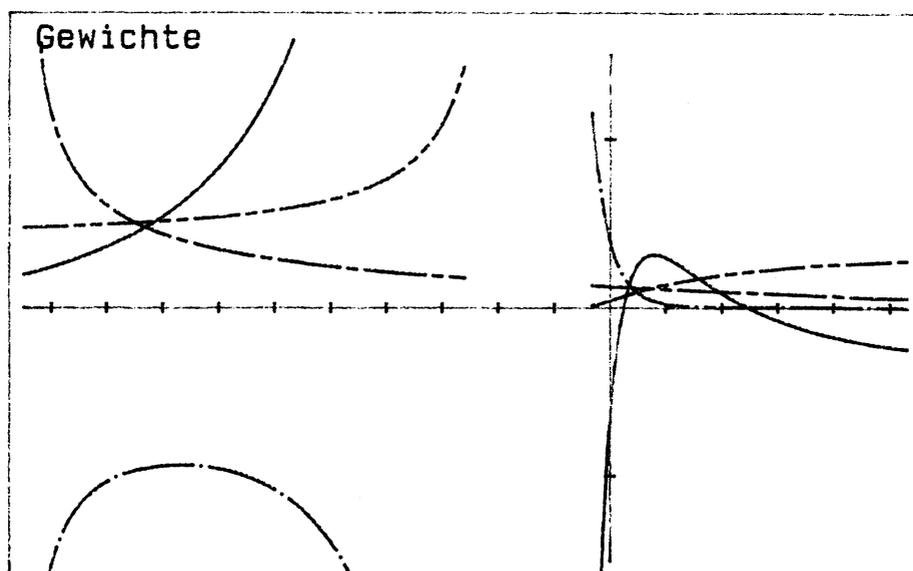


Abbildung 3.6: x-Komponente einiger Knoten

Abbildung 3.7: Gewichte der Formeln für  $T_3$

$\lambda$	Referenz	Besonderheiten
$-\frac{17}{2}$	Grundmann, Möller [33]	gehört zu einer Formelklasse
$\approx 0.245$	Grundmann, Möller [33]	$A_4 = 0$ , 14 Knoten
$\frac{9}{22}$	Stroud [68],[69]	$T_3 : 5 - 1$
$\frac{29}{49}$	Keast [42]	$x_1 = \frac{1}{3}$
$\approx 2.473$		$A_4 = 0$ , 14 Knoten

Tabelle 3.1: Kubaturformeln für  $T_3$  vom Grad 5

wurde das von Beckers [2] bestätigt. Die Gewichte ergeben sich als die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 4 Gleichungen und 4 Variablen (Satz 1.2). Sie sind teilweise negativ (siehe Bild 3.7). Die Betrachtung des Fehlers der Kubaturformeln für einige Polynome höheren Grades ergibt, daß die Formeln für  $\lambda \in (0.3, 1.3)$ , für die alle Gewichte positiv sind, empfehlenswert sind. Dabei zeigte sich, daß Knoten weit außerhalb des Gebietes zu großen Fehlern führen. Kubaturformeln mit negativen Gewichten oder Knoten leicht außerhalb des Gebietes liefern brauchbare Ergebnisse.

In Tabelle 3.1 werden einige bekannte oder besondere Formeln des Kontinuums hervorgehoben. Die Formel von Stroud  $T_3 : 5 - 1$  wurde auch mit Hilfe von orthogonalen Polynomen konstruiert, die einen  $S_4$ -invarianten Raum erzeugen (siehe Stroud [68]).

Für beliebiges  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist es zumindest schwierig, auf einen derartig einfachen Ansatz ohne Hilfe der linearen Darstellungstheorie zu kommen.

Man erkennt deutlich, daß die Ursache dafür, daß 6 linear unabhängige Polynome in 3 Variablen 15 gemeinsame Nullstellen haben, die Symmetrie ist. Der Grund dafür liegt darin, daß Polynome vom Symmetrietyp 2 und 5 erst vom Grad 6 (bzw. 3) ab auftreten.

**Beispiel 3.23 :** In diesem Beispiel werden  $D_4$ -invariante Kubaturformeln vom Grad 15 mit 44 Knoten konstruiert. Mit Hilfe der Sätze 3.10 und 3.16 ermittelt man, daß es zwei erfolgversprechende Ansätze für die  $H$ -Basis gibt. Sie sind in den Bildern 3.8 und 3.9 dargestellt.

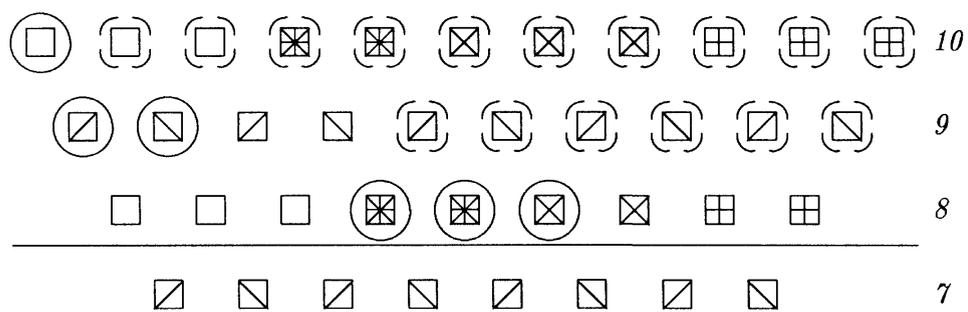


Abbildung 3.8: Ansatz für  $D_4$ -invariante Formel,  $\chi^E = 2\psi_2 + \psi_3 + \chi + \psi_1$

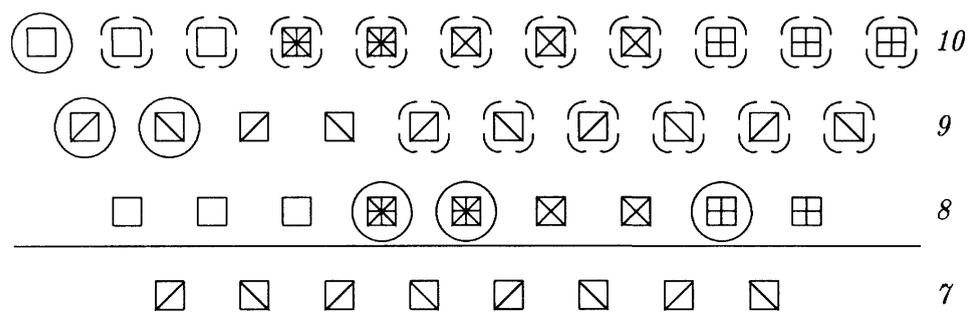


Abbildung 3.9: Ansatz für  $D_4$ -invariante Formel,  $\chi^E = 2\psi_2 + \psi_4 + \chi + \psi_1$

Die kanonische Zerlegung von  $K_8$  ist

$$K_8 = K_8^1 \oplus K_8^2 \oplus K_8^3 \oplus K_8^4 \quad \text{mit}$$

$$K_8^2 = \text{span}(h_{81}^2, h_{82}^2), \quad h_{81}^2 = P^{7,1} - P^{1,7}, \quad h_{82}^2 = P^{5,3} - P^{3,5},$$

$$K_8^3 = \text{span}(h_{81}^3, h_{82}^3), \quad h_{81}^3 = P^{8,0} - P^{0,8}, \quad h_{82}^3 = P^{6,2} - P^{2,6},$$

$$K_8^4 = \text{span}(h_{81}^4, h_{82}^4), \quad h_{81}^4 = P^{7,1} + P^{1,7}, \quad h_{82}^4 = P^{5,3} + P^{3,5}.$$

Im Ansatz für die  $H$ -Basis sind die Polynome

$$h_{81}^2, h_{82}^2 \quad \text{und} \quad p_3 := h_{81}^3 + a \cdot h_{82}^3 \quad \text{bzw.} \quad p_4 := h_{81}^4 + b \cdot h_{82}^4 \quad .$$

Hier ist es günstiger vom Konstruktionsprinzip, bei dem die Parameter aus Gleichungen über Syzygien berechnet werden, abzuweichen. Da  $h_{81}^2$  und  $h_{82}^2$  die Achsen, die Diagonalen und zwei  $D_4$ -Koronen mit je 8 Punkten als gemeinsame Nullstellen haben, bestimmt man den Parameter  $a$  (bzw.  $b$ ) durch die Forderung, daß  $p_3$  (bzw.  $p_4$ ) in den zwei  $D_4$ -Koronen verschwindet. Das sind 2 Gleichungen für einen Parameter. Trotzdem gibt es eine Lösung, weil die äquivalente Forderung nach der Existenz einer Syzygie nur auf eine Gleichung für den Parameter führt.

Mit  $p_3$  ( $p_4$ ) sind drei  $D_4$ -Koronen auf den Achsen (bzw. Diagonalen) festgelegt. Bei der Berechnung der restlichen vier  $D_4$ -Koronen auf den Diagonalen (bzw. Achsen) und den bisherigen Rechnungen wurden die Invarianten  $\sigma_1 = x^2 + y^2, \sigma_2 = x^2 y^2$  ausgenutzt (siehe Kapitel 4).

Für  $C_2$  ergibt sich mit  $p_3$  die Formel von Rabinowitz/Richter [57] ( $C_2 : 15 - 1$  in Stroud [69]) und der andere Ansatz mit  $p_4$  führt auf komplexe gemeinsame Nullstellen. Für  $E_2^{r^2}$  ergibt sich aus dem Ansatz mit  $p_4$  die Formel  $E_2^{r^2} : 15 - 1$  in Stroud [69] von Rabinowitz/Richter [57] (siehe Tabelle 3.2). Da  $E_2^{r^2}$  rotationssymmetrisch ist, ergibt sich aus dem Ansatz mit  $p_3$  die um  $\frac{\pi}{4}$  gedrehte Formel  $E_2^{r^2} : 15 - 1$ . Diese Formeln können nicht mit der  $T$ - und der  $S$ -Methode konstruiert werden.

Die Beispiele zeigen, daß man mit Satz 3.10 leicht Ansätze machen kann, die zum Erfolg führen. Durch die Berechnung von Syzygien in den Konglomeraten, den symmetriegerechten Syzygien, erhält man leicht Gleichungen für die Parameter. Das wird durch die Ausnutzung der Symmetrie erst praktisch durchführbar. Nach Schritt 3.) des Konstruktionsverfahrens hat man frühzeitig die Möglichkeit einen Ansatz zu verwerfen, denn bei mehr

$E_2^{r^2}, d = 15, n = 44, G = D_4, \chi^E = 2\psi_2 + \psi_4 + \chi + \psi_1$				
$\sigma_1$	$\sigma_2$	$x$	$y$	Gewicht
$6 + \sqrt{6}$	$\frac{21+6\sqrt{6}}{4}$	$\sqrt{\frac{6+\sqrt{6}+\sqrt{21+6\sqrt{6}}}{2}}$	$\sqrt{\frac{6+\sqrt{6}-\sqrt{21+6\sqrt{6}}}{2}}$	0.00027354496
$6 - \sqrt{6}$	$\frac{21-6\sqrt{6}}{4}$	$\sqrt{\frac{6-\sqrt{6}+\sqrt{21-6\sqrt{6}}}{2}}$	$\sqrt{\frac{6-\sqrt{6}-\sqrt{21-6\sqrt{6}}}{2}}$	0.02087984557
5	25/4	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	0.00565486678
$6 + \sqrt{21}$	$\left(\frac{6+\sqrt{21}}{2}\right)^2$	$\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{2}}$	$\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{2}}$	0.00003671735
$6 - \sqrt{21}$	$\left(\frac{6-\sqrt{21}}{2}\right)^2$	$\sqrt{\frac{6-\sqrt{21}}{2}}$	$\sqrt{\frac{6-\sqrt{21}}{2}}$	0.17777742684
0.29047	0	0.53896	0	0.43724885438
1.72345	0	1.31280	0	0.11876093308
5.56807	0	2.35968	0	0.00360457742
12.52019	0	3.53839	0	0.00000800648
Die letzten $\sigma_1$ -Werte sind die Nullstellen von				
$548\sigma_1^4 - 11016\sigma_1^3 + 58440\sigma_1^2 - 81900\sigma_1 + 19125.$				

Tabelle 3.2:  $E_2^{r^2} : 15 - 1$  von Rabinowitz/Richter S. 777

Gleichungen als Parameter ist keine Lösung zu erwarten. Nur bei den ungewöhnlichen Integralen  $C_2^{\frac{1}{2}}, C_2^{-\frac{1}{2}}$  trifft das nicht zu (siehe dazu Verlinden et al. [70]). Dadurch daß einige orthogonale Polynome aus den Konglomeraten  $(x^2 + y^2 - 1)$  als gemeinsame Komponente haben, ergeben sich anscheinend weniger Gleichungen.

Die Anzahl der Gleichungen der Parameter wird in Paragraph 5.2 ausführlich diskutiert.

# Kapitel 4

## Konstruktion mit Invarianten

In Kapitel 3 wird beschrieben, wie man  $G$ -invariante Kubaturformeln aus gemeinsamen Nullstellen von  $d$ -orthogonalen Polynomen konstruiert, die ein  $G$ -invariantes Ideal erzeugen und eine H-Basis bilden. In diesem Kapitel dagegen werden die gemeinsame Nullstellen von  $G$ -invarianten Polynomen benutzt, die  $d$ -orthogonal sind. Dabei wird ein Prinzip verwendet, das auf Invariantentheorie beruht und eine Vereinfachung durch Erniedrigung der Polynomgrade bedeutet. Zunächst wird ein Überblick über die Invariantentheorie gegeben.

### 4.1 Überblick über die Invariantentheorie

In diesem Paragraphen werden Ergebnisse aus der klassischen Invariantentheorie zusammengestellt. Einen vollständigeren Überblick findet man z.B. auch in Flatto [25], Hiller S. 57ff [40] und in Sloane S. 94ff [65].

Gegeben sei eine Gruppe  $G$  von linearen Abbildungen  $t : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  mit endlicher Ordnung  $g$ . ( Die Gruppen  $D_3$  und  $S_4$  von affin linearen Abbildungen, wie sie in Beispiel 3.2 und 3.3 definiert wurden, gehören zwar nicht dazu, aber die folgenden Ergebnisse lassen sich leicht übertragen.)

Ein Polynom  $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$  heißt  $G$ -invariant, wenn

$$p(\underline{x}) = p(t(\underline{x})) \quad \forall t \in G$$

gilt (siehe Kapitel 1 ). Die Menge der  $G$ -invarianten Polynome trägt die Struktur eines Ringes und heißt deshalb **Invariantenring**  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^G$ .

**Bemerkung 4.1** : Betrachte  $G = D_4$  und die lineare Darstellung  $\rho$  von  $D_4$  auf  $\mathbb{C}[x, y]$ , wie in Beispiel 3.1. Dann ist das Konglomerat  $V_1^{\mathbb{C}}$  zugehörig zur trivialen Darstellung gleich dem Invariantenring  $\mathbb{C}[x, y]^{D_4}$  (siehe auch Beispiel 2.2).

In der Invariantentheorie wird untersucht, ob sich jedes  $G$ -invariante Polynom durch einige  $G$ -invariante Polynome ausdrücken läßt.

Zunächst sei daran erinnert, daß Polynome  $p_1, \dots, p_l \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$  **algebraisch abhängig** heißen, wenn ein Polynom  $Q \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_l]$  existiert mit  $Q(p_1, \dots, p_l) = 0$ . Ansonsten heißen die Polynome **algebraisch unabhängig**.

**Satz 4.2** (Sloane [65] S. 96): Es gibt  $N$  algebraisch unabhängige,  $G$ -invariante Polynome.

**Satz 4.3** (Sloane [65] S. 96):  $N + 1$   $G$ -invariante Polynome in  $N$  Variablen sind algebraisch abhängig.

Angestrebt wird aber, daß sich jedes  $G$ -invariante Polynom als Polynom in einigen  $G$ -invarianten Polynomen  $\sigma_i$  darstellen läßt.

**Definition 4.4** :  $G$ -invariante Polynome  $\sigma_1, \dots, \sigma_l \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^G$  bilden eine **Basis** des Invariantenringes  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^G$ , wenn für jedes  $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^G$  ein  $Q \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_l]$  existiert mit  $p = Q(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ .

Hilbert [39] zeigte, daß jeder Invariantenring  $\mathbb{C}[\underline{x}]^G$  eine Basis aus endlich vielen  $G$ -invarianten Polynomen besitzt. Zwischen diesen **Basisinvarianten** bestehen gegebenenfalls Relationen, genannt Syzygien (nicht zu verwechseln mit den Syzygien aus Paragraph 1.2). Hilbert führte diesen Namen für Polynome  $Q \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_l]$  mit  $Q(\sigma_1(\underline{x}), \dots, \sigma_l(\underline{x})) \equiv 0$  ein. Es reichen endlich viele Syzygien, um die Abhängigkeit der Basisinvarianten zu beschreiben.

**Beispiel 4.5** : Der Invariantenring  $\mathbb{C}[x, y]^{D_4}$  ist isomorph zu  $\mathbb{C}[\sigma_1, \sigma_2]$  mit  $\sigma_1 = x^2 + y^2$  und  $\sigma_2 = x^2 y^2$ . Für den Invariantenring zu  $Ro_4$  gilt:

$$\mathbb{C}[x, y]^{Ro_4} \simeq \mathbb{C}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] / \sigma_3^2 = \sigma_1^2 \sigma_2 - 4\sigma_2^2$$

mit  $\sigma_1 = x^2 + y^2$ ,  $\sigma_2 = x^2 y^2$  und  $\sigma_3 = xy(x^2 - y^2)$ . Das wird in Paragraph 4.2 ausgeführt.

Bei Noether [56] findet man eine obere Schranke für die Anzahl der Basisinvarianten und einen Weg, mit dem sie konstruiert werden können.

Für einige Gruppen ist die Frage nach einer Basis des Invariantenringes besonders einfach.

**Definition 4.6** : Eine endliche Spiegelungsgruppe ist eine Gruppe  $G$  von linearen Abbildungen auf dem  $\mathbb{C}^N$ , die von Spiegelungen (lineare Abbildungen, die eine Hyperebene der Dimension  $N - 1$  fest lassen) erzeugt wird.

**Satz 4.7** (Chevalley [6]): Sei  $G$  eine endliche Spiegelungsgruppe auf dem  $\mathbb{C}^N$ . Dann gibt es eine Basis des Invariantenringes  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^G$  aus  $N$  algebraisch unabhängigen, homogenen Polynomen  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ .

Nach dem Satz von Shephard und Todd (Flatto [25] S. 251) sind die endlichen Spiegelungsgruppen die einzigen Gruppen, deren Invariantenring eine Basis aus  $N$  homogenen Polynomen hat. In einigen Fällen ist auch etwas über die Grade der homogenen Basisinvarianten bekannt.

**Satz 4.8** (Flatto S. 249 [25]): Sei  $G$  eine endliche Gruppe auf dem  $\mathbb{C}^N$  mit der Ordnung  $g$ . Der Invariantenring  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^G$  habe eine Basis  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  mit homogenen Polynomen vom Grad  $d_1, \dots, d_N$ . Dann gilt

$$\prod_{i=1}^N d_i = g, \quad \sum_{i=1}^N (d_i - 1) = r,$$

wobei  $r$  die Anzahl der Spiegelungen in  $G$  ist.

**Bemerkung 4.9** : Für die Gruppen  $D_3$  und  $S_4$  von affin linearen Abbildungen, wie sie in Beispiel 3.2 und 3.3 definiert wurden, ist der Satz 4.7 nicht direkt anwendbar. Da  $D_3$  und  $S_4$  durch jeweils eine affin lineare Abbildung aus Spiegelungsgruppen entstehen, gibt es eine Basis des Invariantenringes aus algebraisch unabhängigen Polynomen, die wegen der Translation nicht homogen sind. Allgemein formuliert: Ist  $\tilde{G}$  eine endliche Spiegelungsgruppe des  $\mathbb{C}^N$  mit Invariantenbasis  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  und  $T : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  eine invertierbare, affin lineare Abbildung, so hat  $G := \{t \mid t = T\tilde{t}T^{-1}, \tilde{t} \in \tilde{G}\}$  die Invariantenbasis  $\sigma_1(T^{-1}(\underline{x})), \dots, \sigma_N(T^{-1}(\underline{x}))$ .

Gruppe	Invarianten	Grad	Referenz
$D_3$	$\sigma_1 = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2,$ $\sigma_2 = x^3 + y^3 + (1 - x - y)^3$	$d_1 = 2,$ $d_2 = 3$	Mysovskikh [55]
$D_4$	$\sigma_1 = x^2 + y^2$ $\sigma_2 = x^2 y^2$	$d_1 = 2,$ $d_2 = 4$	Mysovskikh [55] Verlinden et al. [70]
$D_n$	$\sigma_2 = r^2 \quad x = r \cos \theta$ $\sigma_n = r^n \cos n\theta \quad y = r \sin \theta$	$d_2 = 2,$ $d_n = n$	Cools/Haeg. [9]
$S_4$	$\sigma_1 = x^2 + y^2 + z^2 + (1 - x - y - z)^2$ $\sigma_2 = x^3 + y^3 + z^3 + (1 - x - y - z)^3$ $\sigma_3 = x^4 + y^4 + z^4 + (1 - x - y - z)^4$	$d_1 = 2,$ $d_2 = 3,$ $d_3 = 4$	Mysovskikh[55] Beckers/Haeg. [1]
$Z_2 \times S_4$	$\sigma_1 = x^2 + y^2 + z^2,$ $\sigma_2 = x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2,$ $\sigma_3 = x^2 y^2 z^2$	$d_1 = 2,$ $d_2 = 4,$ $d_3 = 6$	Mysovskikh[55] Haeg./Cools [37]

Tabelle 4.1: Invariantenbasis einiger Gruppen

Für Gruppen, die bei der Konstruktion von Kubaturformeln auftreten, sind eine Basis des Invariantenringes und der Grad der Basisinvarianten bekannt (siehe Tabelle 4.1). Die Spiegelungsgruppen, die Coxetergruppen sind, werden in Flatto [25] (S. 257ff) klassifiziert und die Grade der homogenen Basisinvarianten angegeben.

Sind  $\sigma_1, \sigma_2$  Basisinvarianten vom gleichem Grad, so bilden auch andere Linearkombinationen davon, z. B.  $\sigma_1 + \sigma_2, \sigma_1 - \sigma_2$ , Basisinvarianten.

Für Gruppen, die keine Spiegelungsgruppen sind, ist die Bestimmung einer Basis des Invariantenringes schwieriger. Ein Hilfsmittel ist dabei die Formel von Molien (siehe z.B. Flatto [25] S. 243, Hiller [40] S. 67). Daraus ergibt sich auch  $\dim \mathbb{P}_d^G$ , die Dimension des Raumes der  $G$ -invarianten Polynome vom Grad  $d$  oder kleiner. Dieser Weg wurde von Cools/Haegemans [11], [12] für  $G = Ro_3$  und  $G = Ro_4$  benutzt. Dort wird auch eine **gute Invariantenbasis** definiert.  $\sigma_1, \dots, \sigma_l$  bilden eine solche gute Basis von  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^G$ , wenn

$\sigma_1, \dots, \sigma_N$  algebraisch unabhängig sind,

$$\mathbb{C}[\underline{x}]^G \simeq \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_N] \oplus \sum_{\nu=N+1}^l \sigma_\nu \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_N]$$

und  $\sigma_i \sigma_j = q_{ij}(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$  mit  $i, j = N+1, \dots, l, q_{ij} \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_N]$  gilt.

## 4.2 Invariantenbasis und $\dim P_d^G$ für Untergruppen von Spiegelungsgruppen

In diesem Paragraphen wird auf die Struktur des Invariantenringes für  $G \in \{Ro_3, Ro_4, A_4\}$  eingegangen, die Untergruppen von Spiegelungsgruppen sind.

Die kanonische Zerlegung der Darstellung von  $D_4$  auf  $\mathbb{C}[x, y]$  aus Beispiel 3.1 ist

$$\mathbb{C}[x, y] = V_1^{\mathbb{C}} \oplus V_2^{\mathbb{C}} \oplus V_3^{\mathbb{C}} \oplus V_4^{\mathbb{C}} \oplus V_5^{\mathbb{C}}.$$

Dabei gilt  $V_1^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[x, y]^{D_4}$ . Für die entsprechende reelle kanonische Zerlegung

$$\mathbb{R}[x, y] = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5$$

gilt  $V_1 = \mathbb{R}[x, y]^{D_4}$ .

Ein Polynom  $p_2 \in V_2$  verschwindet auf den Achsen und Diagonalen, da für eine Spiegelung  $s$  an einer dieser Geraden

$$\rho(s)(p_2) = \psi_2(s)p_2 = -p_2$$

gilt. Für Drehungen  $r \in D_4$  gilt

$$\rho(r)(p_2) = \psi_2(r)p_2 = p_2.$$

Also gilt

$$p_2(x, y) = xy(x^2 - y^2)q_1(x, y)$$

mit einem  $D_4$ -invarianten Polynom  $q_1 \in V_1$ . Umgekehrt ist für jedes  $p_1 \in V_1, p_2 \in V_2$  auch  $p_2 p_1$  ein Polynom aus  $V_2$ . Damit ist folgendes Lemma bewiesen:

**Lemma 4.10** : Sei  $\mathbb{R}[x, y] = V_1 + \dots + V_5$  die reelle kanonische Zerlegung für  $D_4$ .  $V_2$  ist ein freier  $V_1$ -Modul, der von  $\sigma_3(x, y) = xy(x^2 - y^2)$  erzeugt wird.

Da jedes  $p_2 \in V_2$   $Ro_4$ -invariant ist und  $V_3, V_4$  und  $V_5$  keine  $Ro_4$ -invarianten Polynome enthalten, gilt

$$\mathbb{R}[x, y]^{Ro_4} = V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}[x, y]^{D_4} \oplus \sigma_3 \mathbb{R}[x, y]^{D_4}.$$

**Satz 4.11** : Der Invariantenring  $\mathbb{R}[x, y]^{Ro_4}$  ist isomorph zu

$$\mathbb{R}[\sigma_1, \sigma_2] \oplus \sigma_3 \mathbb{R}[\sigma_1, \sigma_2],$$

wobei  $\sigma_1(x, y) = x^2 + y^2$  und  $\sigma_2(x, y) = x^2 y^2$  eine Basis des Invariantenringes  $\mathbb{R}[x, y]^{D_4}$  bilden und für  $\sigma_3(x, y) = xy(x^2 - y^2)$  die Syzygie

$$\sigma_3^2 = \sigma_1^2 \sigma_2 - 4\sigma_2^2 \quad \text{gilt.}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  bilden also eine gute Invariantenbasis.

Schon in Kapitel 1 wurde der Satz von Sobolev 1.2 erwähnt, der besagt, daß eine  $G$ -invariante Kubaturformel, die alle  $G$ -invarianten Polynome vom Grad  $\leq d$  ( $\mathbb{P}_d^G$ ) exakt integriert, schon den Grad  $d$  hat.

Zur Aufstellung des Gleichungssystems (1.2) wird eine Basis von  $\mathbb{P}_d^G$  benötigt. Insbesondere interessiert also die Dimension von  $\mathbb{P}_d^G$ .

Für  $G = Ro_4$  gilt nach Lemma 4.10

$$\dim \mathbb{P}_d^{Ro_4} = \dim \mathbb{P}_d^{D_4} + \dim \mathbb{P}_{d-4}^{D_4} \quad \forall d \geq 4.$$

Diese Argumentation läßt sich auf andere Untergruppen übertragen, denn Lemma 4.10 ist ein Spezialfall folgenden Satzes:

**Satz 4.12** (Hiller [40] S. 90): Sei  $G$  eine Spiegelungsgruppe auf dem  $\mathbb{C}^N$  endlicher Ordnung. Sei  $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{C}[\underline{x}])$ ,  $\rho(t)(p(\underline{x})) = p(t(\underline{x}))$  eine lineare Darstellung auf dem Polynomring in  $N$  Variablen. Bezeichnet  $V_1 = \mathbb{C}[\underline{x}]^G$  das Konglomerat zur trivialen Darstellung und  $V_i$  ( $i \neq 1$ ) ein Konglomerat zugehörig zu einer eindimensionalen, irreduziblen Darstellung (ungleich der trivialen Darstellung), so gibt es ein  $p_i \in V_i$  mit

$$V_i = p_i \cdot V_1.$$

Für andere Untergruppen kann man Überlegungen anstellen, die analog zu denen für  $Ro_4$  sind. Die Dimensionsangaben für  $\mathbb{P}_d^G$  findet man in Tabelle 4.2 und teilweise in [11], [12], [29]. Für  $d < 0$  gilt in Tabelle 4.2 die Konvention  $\dim \mathbb{P}_d^G = 0$ .

Die Invariantenbasis wurde im Zusammenhang mit dem Satz 1.2 bei der Aufstellung der Momentengleichungen schon von Mysovshikh [55] und dann unter anderen von Cools und Haegemans [9], [11] verwendet. Auch Goethals und Seidel [32] haben Invariantentheorie angewendet.

G	Invariantenbasis	Syzygien	$\dim \mathbb{P}_d^G$
$Ro_4$	$\sigma_1 = x^2 + y^2, \quad \sigma_2 = x^2 y^2,$ $\sigma_3 = xy(x^2 - y^2)$	$\sigma_3^2 = \sigma_1 \sigma_2 - 4\sigma_2^2$	$\dim \mathbb{P}_d^{D_4} +$ $\dim \mathbb{P}_{d-4}^{D_4}$
$Sya$	$\sigma_1 = x^2 + y^2$ oder $\sigma_1 = x^2$ $\sigma_2 = x^2 - y^2$ oder $\sigma_2 = y^2$		$\dim \mathbb{P}_d^{D_4} +$ $\dim \mathbb{P}_{d-2}^{D_4}$
$Syd$	$\sigma_1 = x^2 + y^2,$ $\sigma_2 = xy$		$\dim \mathbb{P}_d^{D_4} +$ $\dim \mathbb{P}_{d-2}^{D_4}$
$Ro_3$	$\sigma_1 = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2$ $\sigma_2 = x^3 + y^3 + (1 - x - y)^3$ $\sigma_3 = (x - y)(1 - 2x - y)(1 - x - 2y)$	$\sigma_3^2 = \frac{1}{2}\sigma_1^3 - 3\sigma_2^2$ $+ 6\sigma_1\sigma_2 - \frac{7}{2}\sigma_1^2$ $-\frac{4}{3}\sigma_2 + \frac{3}{2}\sigma_1 - \frac{1}{6}$	$\dim \mathbb{P}_d^{D_3} +$ $\dim \mathbb{P}_{d-3}^{D_3}$
$A_4$	$\sigma_1 = x^2 + y^2 + z^2 + (1 - x - y - z)^2$ $\sigma_2 = x^3 + y^3 + z^3 + (1 - x - y - z)^3$ $\sigma_3 = x^4 + y^4 + z^4 + (1 - x - y - z)^4$ $\sigma_4 = (x - y)(x - z)(1 - 2x - y - z)$ $\cdot (y - z)(1 - x - 2y - z)$ $\cdot (1 - x - y - 2z)$	$\sigma_4^2 = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$	$\dim \mathbb{P}_d^{S_4} +$ $\dim \mathbb{P}_{d-6}^{S_4}$

Tabelle 4.2: Invariantenbasis einiger Untergruppen

### 4.3 Konstruktion mit $G$ -invarianten Polynomen

In diesem Paragraphen wird diskutiert, wann die gemeinsamen Nullstellen von  $d$ -orthogonalen,  $G$ -invarianten Polynomen als die Knoten einer  $G$ -invarianten Kubaturformel genutzt werden können. Grundlegend ist dabei folgendes bekanntes Prinzip:

**Satz 4.13** : Sei  $G$  eine endliche Spiegelungsgruppe des  $\mathbb{R}^N$  oder  $G = \{t \mid t = T\tilde{t}T^{-1}, \tilde{t} \in \tilde{G}\}$ , wobei  $\tilde{G}$  eine endliche Spiegelungsgruppe und  $T$  eine affin lineare Abbildung ist, oder sei  $G$  eine der Untergruppen  $Ro_3, Ro_4, A_4$ . Für die Spiegelungsgruppen sei  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  eine Basis von  $\mathbb{R}[\underline{x}]^G$ . Für die anderen Gruppen sei  $\sigma_1, \dots, \sigma_{N+1}$  eine gute Invariantenbasis aus Tabelle 4.2 mit Syzygie  $Sy(\underline{\sigma}) := \sigma_{N+1}^2 - q(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = 0$ . Seien  $Q_1, \dots, Q_m \in \mathbb{R}[\sigma_1, \dots, \sigma_N]$  ( bzw.  $Q_1, \dots, Q_m \in \mathbb{R}[\sigma_1, \dots, \sigma_N] \oplus \sigma_{N+1}\mathbb{R}[\sigma_1, \dots, \sigma_N]$ ) und

$$p_i(\underline{x}) := Q_i(\sigma_1(\underline{x}), \dots, \sigma_l(\underline{x})), \quad i = 1, \dots, m$$

die zugehörigen  $G$ -invarianten Polynome ( $l = N$  bzw.  $l = N + 1$ ). Die gemeinsamen Nullstellen  $(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_l) \in \mathbb{C}^l$  von  $Q_1, \dots, Q_m$  ( und  $Sy$ ) entsprechen eindeutig den  $G$ -Koronen an gemeinsamen Nullstellen  $\underline{y} \in \mathbb{C}^N$  von  $p_1, \dots, p_m$ .

BEWEIS: Sei  $\underline{y}$  eine gemeinsame Nullstelle von  $p_1, \dots, p_m$ . Dann ist auch jeder andere Punkt der  $G$ -Korona  $k_{\underline{y}}$  eine gemeinsame Nullstelle von  $p_1, \dots, p_m$ . Durch

$$\tilde{\sigma}_i^{\underline{y}} := \sigma_i(\underline{y}), \quad i = 1, \dots, l$$

wird der  $G$ -Korona  $k_{\underline{y}}$  ein Punkt  $(\tilde{\sigma}_1^{\underline{y}}, \dots, \tilde{\sigma}_l^{\underline{y}}) \in \mathbb{C}^l$  zugeordnet.  $(\tilde{\sigma}_1^{\underline{y}}, \dots, \tilde{\sigma}_l^{\underline{y}})$  ist eine gemeinsame Nullstelle der  $Q_i$  ( und  $Sy$ ):

$$Q_i(\tilde{\sigma}_1^{\underline{y}}, \dots, \tilde{\sigma}_l^{\underline{y}}) = Q_i(\sigma_1(\underline{y}), \dots, \sigma_l(\underline{y})) = p_i(\underline{y}) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Sei umgekehrt  $(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_l) \in \mathbb{C}^l$  eine gemeinsame Nullstelle von  $Q_1, \dots, Q_m$ . Für die Gruppen, die keine Spiegelungsgruppen sind, sei der Punkt auch eine Nullstelle der Syzygie  $Sy$ .

**1.Fall:**  $G$  sei eine endliche Spiegelungsgruppe. Die Basisinvarianten  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  seien homogene Polynome vom Grad  $d_1, \dots, d_N$ . Nach dem Satz von Bezout ( siehe Abschnitt 1.2) haben

$$\sigma_1(\underline{x}) - \tilde{\sigma}_1, \dots, \sigma_N(\underline{x}) - \tilde{\sigma}_N$$

also  $\prod_{i=1}^N d_i$  gemeinsame Nullstellen oder unendlich viele. Sie können aber nicht unendlich viele gemeinsame Nullstellen haben. Dann hätten sie eine Nullstelle im Unendlichen, d.h.  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  hätten auch unendlich viele gemeinsame Nullstellen. Sie können aber nur  $(0, \dots, 0)$  als gemeinsame Nullstelle haben. Wäre auch  $\tilde{y}$  eine weitere Nullstelle, so ließe sich ein  $G$ -invariantes Polynom konstruieren, das in  $(0, \dots, 0)$  verschwindet, aber nicht in  $\tilde{y}$ . Dieses Polynom ließe sich dann nicht als Polynom in  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  darstellen. Also haben  $\sigma_i(\underline{x}) - \tilde{\sigma}_i$  genau  $\prod_{i=1}^N d_i$  gemeinsame Nullstellen.

Mit  $\underline{y} \in \mathbb{C}^N$  ist aber auch  $t(\underline{y}) \forall t \in G$ , die Elemente der  $G$ -Korona  $k_{\underline{y}}$ , eine Nullstelle.

Rechnet man mit Vielfachheit, so ist die Anzahl der Nullstellen in  $k_{\underline{y}}$  gleich der Ordnung  $g$  von  $G$ . Da nach Satz 4.8

$$\prod_{i=1}^N d_i = g$$

gilt, entspricht einer Nullstelle  $(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_N)$  genau einer  $G$ -Korona an Nullstellen  $k_{\underline{y}}$ .

Falls sich  $G$  von einer endlichen Spiegelungsgruppe nur durch eine affin lineare Abbildung  $T$  unterscheidet, gilt auch die eindeutige Zuordnung zwischen den  $G$ -Koronen an gemeinsamen Nullstellen der  $p_i$  und den gemeinsamen Nullstellen der  $Q_i$ .

**2.Fall:**  $G$  ist keine Spiegelungsgruppe, aber eine Untergruppe einer Spiegelungsgruppe  $G_s$ .  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  bilden eine Invariantenbasis von  $\mathbb{C}[\underline{x}]^{G_s}$  und  $\sigma_1, \dots, \sigma_{N+1}$  eine Basis von  $\mathbb{C}[\underline{x}]^G$ , wobei  $\sigma_{N+1}^2 = q(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$  mit  $q \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_N]$  gilt.

Sei  $(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{N+1})$  eine gemeinsame Nullstelle von  $Q_1, \dots, Q_m$  mit  $\tilde{\sigma}_{N+1}^2 = q(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_N)$ . Nach Fall 1.) ist  $(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_N)$  eindeutig eine  $G_s$ -Korona  $k_{\underline{y}}^s$  zugeordnet.

Für  $\underline{y} \in k_{\underline{y}}^s$  gilt dann

$$(\sigma_{N+1}(\underline{y}))^2 = q(\sigma_1(\underline{y}), \dots, \sigma_N(\underline{y})) = \tilde{\sigma}_{N+1}^2,$$

also  $\sigma_{N+1}(\underline{y}) = \tilde{\sigma}_{N+1}$  oder  $\sigma_{N+1}(\underline{y}) = -\tilde{\sigma}_{N+1}$ . Falls  $\sigma_{N+1}(\underline{y}) = \tilde{\sigma}_{N+1}$  gilt, ist auch

$$\sigma_{N+1}(t(\underline{y})) = \tilde{\sigma}_{N+1} \quad \forall t \in G.$$

Der Nullstelle  $(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{N+1})$  entspricht also eine  $G$ -Korona an Nullstellen von  $p_1, \dots, p_m$ .

Ist  $\tilde{\sigma}_{N+1} \neq 0$  und  $\sigma_{N+1}(\underline{y}) = -\tilde{\sigma}_{N+1}$ , so gilt  $\sigma_{N+1}(t(\underline{y})) = \tilde{\sigma}_{N+1}$  für ein  $t \in G_s \setminus G$ . ■

Sucht man die gemeinsamen Nullstellen von  $G$ -invarianten Polynomen  $p_1, \dots, p_m$ , so bestimmt man zuerst die gemeinsamen Nullstellen  $(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_l)$  der zugehörigen Polynome  $Q_1, \dots, Q_m$  und löst dann

$$\sigma_i(\underline{x}) = \tilde{\sigma}_i, \quad i = 1, \dots, l.$$

Für  $G = D_3$  reduziert sich damit z.B. die Frage, ob 3  $D_3$ -invariante Polynome  $p_1, p_2, p_3$  18 gemeinsame Nullstellen haben, auf die Frage, ob  $Q_1, Q_2, Q_3$  3 gemeinsame Nullstellen haben.

Dieses Prinzip ist auch noch sinnvoll anwendbar, wenn man gemeinsame Nullstellen von

$$q_i = r_i p_i, \quad i = 1, \dots, m$$

sucht, wobei nur die  $p_i$   $G$ -invariant sind (siehe Beispiel 3.23). Für  $G = Sya$  haben auch Haegemans und Piessens [34] dieses Prinzip mit den Invarianten  $\sigma_1 = x^2, \sigma_2 = y^2$  benutzt, ohne auf die Invariantentheorie hinzuweisen.

In Kapitel 1 wurde darauf hingewiesen, daß die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (1.1) für die Knoten und Gewichte aufgeteilt wird in eine Suche nach gemeinsamen Nullstellen als Knoten und einem linearen Gleichungssystem für die Gewichte.

Das nach Satz 1.2 reduzierte System (1.2) für  $G$ -invariante Kubaturformeln zerfällt analog, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 4.14 :** Sei  $G$  eine der Gruppen aus Satz 4.13 und  $\sigma_1, \dots, \sigma_l$  ( $l = N$  bzw.  $l = N + 1$ ) die entsprechende Basis des Invariantenringes. Sei  $\mathcal{A}^G$  ein Ideal in  $\mathbb{R}[\underline{x}]^G$ . Sei  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}[\sigma_1, \dots, \sigma_l]$  das zugehörige Ideal mit

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathcal{A}^G \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \text{mit} \quad B(\sigma_1(\underline{x}), \dots, \sigma_l(\underline{x})) = p(\underline{x}) \\ \text{und} \quad B(\sigma_1(\underline{x}), \dots, \sigma_l(\underline{x})) \in \mathcal{A}^G \quad \forall B \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Ist  $G$  keine Spiegelungsgruppe, so sei auch die Syzygie  $Sy(\underline{\sigma}) := \sigma_{N+1}^2 - q(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$  ein Element von  $\mathcal{B}$ . Sei  $I$  ein  $G$ -invariantes Integral. Seien die folgenden Bedingungen erfüllt.

i.) Es gilt  $I|_{\mathcal{A}^G \cap \mathbb{P}_d} = 0$ .

ii.)  $\mathcal{B}$  hat reelle, einfache Nullstellen  $(\tilde{\sigma}_1^j, \dots, \tilde{\sigma}_l^j)$ ,  $j = 1, \dots, \eta$ .

iii.) Für jedes  $j$  hat das System  $\tilde{\sigma}_i^j = \sigma_i(\underline{x}), i = 1, \dots, l$  reelle Lösungen  $\underline{y}_k^j$ .

Unter den Voraussetzungen i.), ii.) und iii.) gibt es eine  $G$ -invariante Kubaturformel

$$Q(f) = \sum_{j=1}^{\eta} \sum_k A_j f(\underline{y}_k^j)$$

vom Grad mindestens  $d$ .

Dieser Satz wird auch von Cools [18] S. 144 angegeben.

BEWEIS: : Nach Satz 1.2 gilt

$$I(p) = Q(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_d$$

genau dann, wenn

$$I(p) = Q(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_d^G$$

gilt. Aus Bedingung ii.) und iii.) folgt mit Satz 4.13, daß die Nullstellen von  $\mathcal{A}^G$  die Lösungen  $\underline{y}_k^j$  sind, die in  $\eta$   $G$ -Koronen angeordnet sind. Eine  $G$ -invariante Kubaturformel mit diesen  $G$ -Koronen als Knoten integriert wegen i.) alle Polynome

$$p \in \mathcal{A}^G \cap \mathbb{P}_d^G$$

exakt.

Die Kodimension von  $\mathcal{A}^G$  in  $\mathbb{R}[\underline{x}]^G$  ist gleich der Kodimension von  $\mathcal{B}$  in  $\mathbb{R}[\sigma_1, \dots, \sigma_l]$ . Diese Kodimension kann mit Hilfe der Hilbertfunktion  $H(k, \mathcal{B})$  ermittelt werden. Weil  $\mathcal{B}$  nulldimensional ist, gilt ab einem  $K \in \mathbb{N}$

$$H(k, \mathcal{B}) = \eta \quad \text{für } \forall k \geq K.$$

Also ist die Kodimension von  $\mathcal{A}^G$  in  $\mathbb{R}[\underline{x}]^G$  höchstens  $\eta$ . Andererseits ist jeweils ein Gewicht pro  $G$ -Korona zu bestimmen. Da  $\eta$   $G$ -Koronen vorliegen, gibt es mindestens eine Lösung für die Gewichte  $A_j$ , so daß alle Polynome  $p \in \mathbb{P}_d^G$  und damit alle  $p \in \mathbb{P}_d$  exakt integriert werden. ■

**Beispiel 4.15** : Eine neue  $S_4$ -invariante Formel fürs Tetraeder  $T_3$  vom Grad 2 wird folgendermaßen konstruiert. Als Basisinvarianten des Invariantenringes  $\mathbb{R}[x, y, z]^{S_4}$  werden

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x^2 + y^2 + z^2 + (1 - x - y - z)^2, \\ \sigma_2 &= x^3 + y^3 + z^3 + (1 - x - y - z)^3, \\ \sigma_3 &= xyz(1 - x - y - z) \end{aligned}$$

verwendet. Für  $Q_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) := \sigma_1 - \frac{2}{5}$  ist das zugehörige  $S_4$ -invariante Polynom  $p_1 := Q_1(\sigma_1(x, y, z), \sigma_2(x, y, z), \sigma_3(x, y, z))$  orthogonal. Wählt man Polynome

$$Q_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_2 - \tilde{\sigma}_2, \quad Q_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_3 - \tilde{\sigma}_3$$

beliebig, so gibt es eine gemeinsame Nullstelle  $(\frac{2}{5}, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3)$  von  $\mathcal{B} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ . Die Voraussetzung i.) des Satzes für die Existenz einer  $S_4$ -invarianten Formel vom Grad 2 mit einer  $S_4$ -Korona als Knotenmenge, die dieser Nullstelle entspricht, ist erfüllt. Eine beliebige  $S_4$ -Korona hat 24 Punkte. Das sind zuviele Knoten für eine Formel vom Grad 2. Deshalb verlangt man, daß die  $S_4$ -Korona vom Typ  $(x, x, x; 1 - 3x)$  ist. Als Lösung von

$$\sigma_1(x, x, x) = \tilde{\sigma}_1 = \frac{2}{5}$$

erhält man

$$x = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{20}.$$

Mit dem Gewicht  $A_1 = \frac{1}{24}$  sind das 2 Formeln ( $T_N : 2 - 1$  in Stroud [69]). Verlangt man, daß die Korona vom Typ  $(x, x, 0.5 - x; 0.5 - x)$  ist, ergibt sich

$$x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{3}{80}}.$$

Mit dem Gewicht  $A_1 = \frac{1}{36}$  ist das eine  $S_4$ -invariante Formel mit 6 Knoten.

Es ist vorteilhaft mit dem Ideal  $\mathcal{B}$  zu arbeiten, da die Polynome in einer Idealbasis von  $\mathcal{B}$  niedrigeren Grad haben und weniger Terme enthalten als die zugehörigen Polynome in  $\mathcal{A}^G$ . Die Berechnung der gemeinsamen Nullstellen ist einfacher, da es weniger sind. Für die dreidimensionalen Integrale ergeben sich allerdings im allgemeinen  $G$ -Koronen mit vielen Punkten, so daß die Kubaturformeln viele Knoten enthalten.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Konstruktion mit dem letzten Satz 4.14 und der mit Satz 3.6? Zu jedem  $G$ -invarianten Ideal  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$  gibt es eindeutig ein Ideal  $\mathcal{A}^G := \mathcal{A} \cap \mathbb{R}[\underline{x}]^G$  mit  $G$ -invarianten Polynomen. Einem Ideal  $\mathcal{A}^G \subset \mathbb{R}[\underline{x}]^G$  sind dagegen in einigen Fällen mehrere  $G$ -invariante Ideale  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$  zugeordnet mit der Eigenschaft

$$\mathcal{A}^G = \mathcal{A} \cap \mathbb{R}[\underline{x}]^G.$$

Das hängt davon ab, ob  $\mathcal{A}$  nur einfache oder auch mehrfache Nullstellen hat. Hier interessiert das maximale,  $G$ -invariante Ideal, das  $\mathcal{A}^G$  zugeordnet ist. Gilt für  $\mathcal{A}^G \subset \mathbb{R}[\underline{x}]^G$

$$I_{|\mathcal{A}^G \cap \mathbb{P}_d} = 0,$$

so gilt auch für das maximale  $G$ -invariante Ideal  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$  mit  $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}[\underline{x}]^G = \mathcal{A}^G$  auch

$$I_{|\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_d} = 0. \quad (4.1)$$

Für Bedingung (4.1), die nach Satz 1.5 zur Konstruktion benötigt wird, ist

$$I_{|\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_d \cap V_i} = 0, \quad i \neq 1$$

zu zeigen, wobei  $V_i, i = 1, \dots, h$  (bzw.  $i = 1, \dots, l$  mit  $l \leq h - 1$ ) die reellen Konglomerate aus der kanonischen Zerlegung von  $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{R}[\underline{x}])$  sind.

Da das Integral  $I$   $G$ -invariant ist, ist auch das induzierte Skalarprodukt  $(p, q) := I(pq)$   $G$ -invariant.

Nach Satz 2.11 sind die Konglomerate orthogonal zueinander. Wegen  $1 \in V_1$  gilt also

$$I_{|V_i} = 0, \quad i \neq 1. \quad \text{Aus } I_{\mathcal{A}^G \cap \mathbb{P}_d} = 0$$

und  $V_1 = \mathbb{R}[\underline{x}]^G$  folgt Bedingung (4.1).

Als Motivation überlegt man folgendes. Welche Bedingungen muß eine Idealbasis  $Q_1, \dots, Q_m$  von  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}[\sigma_1, \dots, \sigma_l]$  erfüllen, damit für das zugehörige Ideal  $\mathcal{A}^G \subset \mathbb{R}[\underline{x}]^G$  die Bedingung i.) aus Satz 4.14

$$I_{|\mathcal{A}^G \cap \mathbb{P}_d} = 0$$

erfüllt ist? Zunächst müssen die zugehörigen Polynome

$$p_i(\underline{x}) := Q_i(\sigma_1(\underline{x}), \dots, \sigma_l(\underline{x})), \quad i = 1, \dots, m$$

$d$ -orthogonal sein. Für jedes  $B \in \mathcal{B}$  und zugehöriges  $p(\underline{x}) := B(\sigma_1(\underline{x}), \dots, \sigma_l(\underline{x}))$  entspricht eine Darstellung

$$B = \sum_{i=1}^m R_i Q_i \quad \text{mit } R_i \in \mathbb{R}[\sigma_1, \dots, \sigma_l], i = 1, \dots, m$$

eine Darstellung

$$p = \sum_{i=1}^m r_i p_i \quad \text{mit } r_i(\underline{x}) = R_i(\sigma_1(\underline{x}), \dots, \sigma_l(\underline{x})) \in \mathbb{R}[\underline{x}]^G, \quad i = 1, \dots, m.$$

Gibt es für jedes  $p \in \mathcal{A}^G \cap \mathbb{P}_d^G$  eine Darstellung mit  $\text{Grad}(r_i p_i) \leq \text{Grad}(p), i = 1, \dots, m$ , so ist Bedingung i.) erfüllt. Solche Darstellungen gibt es, wenn  $Q_1, \dots, Q_m$  eine Gröbner-Basis (siehe Paragraph 1.4) bzgl. einer speziellen Ordnung  $<_G$  bilden. Diese Ordnung erfüllt zwei Bedingungen:

i.) Für zwei Monome  $\underline{\sigma}^i, \underline{\sigma}^j \in \mathbb{R}[\sigma_1, \dots, \sigma_l]$  gilt  $\underline{\sigma}^i <_G \underline{\sigma}^j$ , wenn für die zugehörigen Polynome

$$m_i(\underline{x}) := \underline{\sigma}^i(\underline{x}) \quad \text{und} \quad m_j(\underline{x}) := \underline{\sigma}^j(\underline{x}) \quad \text{Grad}(m_i) < \text{Grad}(m_j) \quad \text{gilt.}$$

(Falls  $G \in \{Ro_3, Ro_4, A_4\}$ ,  $\text{Grad}(m_i) = \text{Grad}(m_j)$ , so gilt

$$i_{N+1} < j_{N+1} \implies \underline{\sigma}^i < \underline{\sigma}^j.)$$

ii.) Folgende Regularitätsbedingung, die schon in Paragraph 1.4 erwähnt wurde, sei erfüllt:

$$1 \leq_G \underline{\sigma}^i \quad \text{und} \quad (\underline{\sigma}^i <_G \underline{\sigma}^j \implies \underline{\sigma}^{i+k} <_G \underline{\sigma}^{j+k}).$$

**Beispiel 4.16** : Für  $D_3$  und den Basisinvarianten

$$\sigma_1 = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2, \quad \sigma_2 = x^3 + y^3 + (1 - x - y)^3$$

erfüllt die Ordnung

$$1 <_{D_3} \sigma_1 <_{D_3} \sigma_2 <_{D_3} \sigma_1^2 <_{D_3} \sigma_1 \sigma_2 <_{D_3} \sigma_2^2 <_{D_3} \sigma_1^3 <_{D_3} \sigma_1^2 \sigma_2 <_{D_3} \sigma_1 \sigma_2^2 <_{D_3} \sigma_1^4 <_{D_3} \dots$$

obige Bedingungen.

Der folgende Satz ist das Analogon zu Satz 1.10.

**Satz 4.17** : Sei  $I$  ein  $G$ -invariantes Integral, wobei  $G$  eine der Gruppen aus Satz 4.13 sei. Für die Spiegelungsgruppen sei  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  eine Invariantenbasis von  $\mathbb{R}[\underline{x}]^G$ . Ansonsten sei  $\sigma_1, \dots, \sigma_{N+1}$  eine gute Invariantenbasis mit der Syzygie  $Sy(\underline{\sigma}) := \sigma_{N+1}^2 - q(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$  aus Tabelle 4.2. Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt.

i.)  $Q_1, \dots, Q_m \in \mathbb{R}[\underline{\sigma}]$  bilden eine Gröbner-Basis bzgl.  $<_G$  von  $\mathcal{B} := (Q_1, \dots, Q_m)$ . ( Falls  $G \in \{Ro_3, Ro_4, A_4\}$  bilden die  $Q_i$  zusammen mit  $Sy$  eine Gröbner-Basis von  $\mathcal{B} := (Q_1, \dots, Q_m, Sy)$ ).

ii.)  $p_i := Q_i(\sigma_1(\underline{x}), \dots, \sigma_l(\underline{x})) \in \mathbb{R}[\underline{x}]$ ,  $i = 1, \dots, m$  sind  $d$ -orthogonal.

iii.)  $Q_1, \dots, Q_m$  ( und  $Sy$  ) haben reelle, einfache, gemeinsame Nullstellen

$$(\tilde{\sigma}_1^j, \dots, \tilde{\sigma}_l^j) \in \mathbb{R}^l, \quad j = 1, \dots, \eta.$$

iv.) Alle Lösungen  $y_k^j$  der Systeme

$$\sigma_i(\underline{x}) = \tilde{\sigma}_i^j, \quad i = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, \eta$$

sind reell.

Sind die Voraussetzungen i.) – iv.) erfüllt, gibt es eine  $G$ -invariante Kubaturformel vom Grad mindestens  $d$  mit den Knoten  $y_k^j$ .

BEWEIS: Es ist nach Satz 4.14 zu zeigen, daß für das zu  $\mathcal{B}$  zugehörige Ideal  $\mathcal{A}^G \subset \mathbb{R}[\underline{x}]^G$  die Bedingung

$$I_{\mathcal{A}^G \cap \mathbb{P}_d} = 0$$

erfüllt ist. Für jedes  $p \in \mathcal{A}^G \cap \mathbb{P}_d$  existiert ein  $B \in \mathcal{B}$ . Da  $Q_1, \dots, Q_m$  (und  $Sy$ ) eine Gröbner-Basis bzgl.  $<_G$  bilden, existieren  $R_i \in \mathbb{R}[\underline{x}]$  mit

$$p = \sum_{i=1}^m R_i Q_i \quad (+ R_{m+1} Sy) \quad \text{mit} \quad lt(R_i Q_i) \leq_G lt(B).$$

Da die Ordnung  $\leq_G$  mit dem Grad in  $\mathbb{R}[\underline{x}]^G$  verträglich ist, gilt für die zugehörige Darstellung

$$p = \sum_{i=1}^m r_i p_i \quad \text{also} \quad \text{Grad}(r_i p_i) \leq \text{Grad}(p), \quad i = 1, \dots, m.$$

Aus Bedingung ii.) folgt dann  $I(p) = 0$ . ■

**Bemerkung 4.18** : Auf diesen Satz wurde schon durch die Bemerkung von Möller [49] S. 189f hingewiesen. Verlinden et al. [70] haben im Appendix erwähnt, daß sie die Eigenschaft der Gröbner-Basis von Polynomen in  $\mathbb{R}[\sigma_1, \sigma_2]$  benutzt haben, um numerisch berechnete,  $D_4$ -invariante Formeln für  $C_2^{\frac{1}{2}}, C_2^{-\frac{1}{2}}$  zu verifizieren.

**Konstruktionsweg :**

- 1.) Für jeden Grad  $k = 1, \dots, d$  wird eine Basis  $b_k^j(\underline{x}) \in \mathbb{R}[\underline{x}]$  des Raumes  $K_k^1$  der orthogonalen,  $G$ -invarianten Polynome vom Grad  $k$  ermittelt und die Basisinvarianten  $\sigma_1, \dots, \sigma_l$  substituiert. Das ergibt Polynome

$$B_k^j(\underline{\sigma}) \in \mathbb{R}[\underline{\sigma}] \quad \text{mit} \quad B_k^j(\sigma_1(\underline{x}), \dots, \sigma_l(\underline{x})) = b_k^j(\underline{x}).$$

Sei die Basis so gewählt, daß

$$lt(B_k^j) <_G lt(B_k^{j+1})$$

gilt und für  $G \in \{Ro_3, Ro_4, A_4\}$  die letzte Invariante  $\sigma_{N+1}$  nur linear auftritt.

- 2.) Man macht einen Ansatz, der von Parametern abhängt, für die Gröbner-Basis  $Q_1, \dots, Q_m$ , so daß Bedingung ii.) aus Satz 4.17 (die Bedingung der  $d$ -Orthogonalität) erfüllt ist und

$$lt(Q_1) <_G lt(Q_2) <_G \dots <_G lt(Q_m)$$

gilt und  $\mathcal{B} = (Q_1, \dots, Q_m)$  (bzw.  $\mathcal{B} = (Q_1, \dots, Q_m, Sy)$ ) nulldimensional ist.

- 3.) Der Test auf Gröbner-Basis besteht darin, die  $S$ -Polynome über  $F = \{Q_1, \dots, Q_m\}$  (bzw.  $F = \{Q_1, \dots, Q_m, Sy\}$ ) zu reduzieren:

$$S_{i,j} := S(Q_i, Q_j) \longrightarrow_F^* \tilde{S}_{i,j} \quad \forall i, j = 1, \dots, m, \quad i \neq j.$$

Aus  $\tilde{S}_{i,j} = 0$  ergeben sich Gleichungen für die Parameter. ( Die formale Anzahl der Gleichungen für ein  $\tilde{S}_{i,j}$  ist gleich der Anzahl der Monome  $m$  mit  $m <_G lt(Q_1)$ . Wegen der Orthogonalität von  $\tilde{S}_{i,j}$  können es auch weniger sein.

- 4.) Löse die Gleichungen für die Parameter. Falls es keine oder nur nicht-reelle Lösungen gibt, versucht man einen neuen Ansatz.
- 5.) Berechne die gemeinsamen Nullstellen  $(\tilde{\sigma}_1^j, \dots, \tilde{\sigma}_l^j)$  von  $Q_1, \dots, Q_m$  (und  $Sy$ ). Falls einige Nullstellen nichtreell sind, weiter mit 2.).
- 6.) Man löst für jedes  $j = 1, \dots, \eta$  das System

$$\sigma_i(\underline{x}) = \tilde{\sigma}_i^j, \quad i = 1, \dots, l.$$

Abbruch, falls sich nichtreelle Lösungen  $\underline{y}_k^j$  ergeben.

- 7.) Die Gewichte sind die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

**Bemerkung 4.19 :** Eine hinreichende Bedingung dafür, daß  $F$  eine Gröbner-Basis ist, besteht darin, daß alle  $S$ -Polynome  $S_{i,j}$  ( und  $S_i := S(Q_i, Sy)$ ) über  $F$  zu Null reduzieren. Um auf Gleichungen für die Parameter zu kommen, reicht es, einige  $\tilde{S}_{i,j}$  zu berechnen, da  $\tilde{S}_{i,j} = 0$  für andere  $\tilde{S}_{i,j}$  nach gewissen Kriterien (siehe [30], [45]) bekannt ist. Zur Bestimmung der gemeinsamen Nullstellen in 5.) und 6.) erstellt man eine Gröbner-Basis bzgl. der lexikographischen Ordnung.

**Beispiel 4.20** :  $D_3$ -invariante Kubaturformeln fürs Dreieck  $T_2$  vom Grad 7 werden nach diesem Weg folgendermaßen konstruiert. Eine Basis der orthogonalen,  $D_3$ -invarianten Polynome ist

$$\begin{aligned} B_2(\sigma_1, \sigma_2) &= \sigma_1 + \frac{1}{4}, \\ B_3(\sigma_1, \sigma_2) &= \sigma_2 - \frac{1}{7}\sigma_1 - \frac{2}{105}, \\ B_4(\sigma_1, \sigma_2) &= \sigma_1^2 + \frac{2}{3}\sigma_2 + \frac{1}{3}\sigma_1 + \frac{1}{36}, \\ B_5(\sigma_1, \sigma_2) &= \sigma_1\sigma_2 - \frac{1}{11}\sigma_1^2 + \frac{3}{11}\sigma_2 - \frac{1}{33}\sigma_1 - \frac{2}{1155}, \\ B_6^1(\sigma_1, \sigma_2) &= \sigma_2^2 - \frac{4}{13}\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{78}\sigma_1^2 - \frac{23}{11 \cdot 13}\sigma_2 + \frac{7}{2145}\sigma_1 + \frac{7}{51480}. \end{aligned}$$

Dafür wurden die  $P^{i,j}(\underline{x})$  nach der Formel aus Grundmann und Möller [33] berechnet, auf  $D_3$ -invariante Polynome projiziert und mit REDUCE die Basisinvarianten

$$\sigma_1 = x^2 + y^2 + xy - x - y, \quad \sigma_2 = x^2y + xy^2 - xy$$

substituiert. Ein sinnvoller Ansatz ist

$$Q_1 := B_4, \quad Q_2 := B_5 + aB_3, \quad Q_3 := B_6^1 + bB_3 + cB_2.$$

Nach Berechnung von

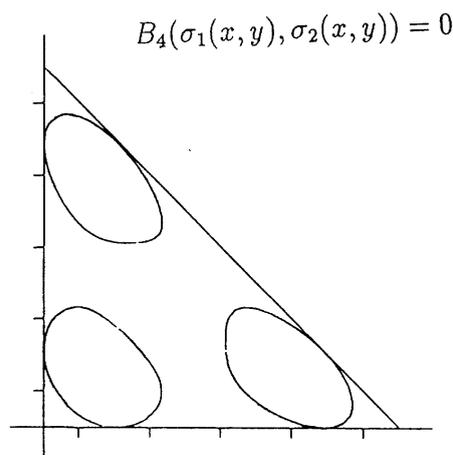
$$S(Q_1, Q_2) \longrightarrow_F^* \tilde{S}_{1,2}, \quad S(Q_2, Q_3) \longrightarrow_F^* \tilde{S}_{2,3}$$

mit  $F = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$  und Lösung der Gleichungen, ergeben sich für die Parameter

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{9}{14 \cdot 13}a + \frac{3}{2}a^2, \\ c &= \frac{2}{245}a. \end{aligned}$$

Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  haben  $Q_1, Q_2, Q_3$  3 reelle Nullstellen. Nachdem eine Gröbner-Basis bzgl. der lexikographischen Ordnung aufgestellt wurde, werden die Nullstellen in Abhängigkeit von  $a$  numerisch berechnet. Wegen der Nullstellenzahl 3 bilden  $Q_1, Q_2, Q_3$  eine Gröbner-Basis bzgl.  $<_{D_3}$ . Für  $a \in (a_1, a_2)$  ( $a_1 \approx 1.36 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_2 \approx 1.021 \cdot 10^{-2}$ ) entsprechen sie  $D_3$ -Koronen mit je 6 reellen Punkten.

Die 3 Gewichte ergeben sich in Abhängigkeit von  $a$  durch ein System von 3 linearen Gleichungen. Es gibt also ein Kontinuum von  $D_3$ -invarianten Formeln vom Grad 7 mit 18 Knoten. Für  $a = a_1$  und  $a = a_2$  entspricht jeweils eine gemeinsame Nullstelle von  $Q_1, Q_2, Q_3$  einer  $D_3$ -Korona mit 3 Punkten auf den Seitenhalbierenden. Für  $a = a_1$  ist diese Formel mit nur 15 Knoten von Laursen und Gellert [44] bekannt.



Folgendes Beispiel zeigt, daß der Ansatz mit Satz 3.10 dem von Satz 4.17 überlegen ist.

**Beispiel 4.21** :  $T_2$  ist  $D_3$ -invariant, also insbesondere  $Ro_3$ -invariant. Um eine  $Ro_3$ -invariante Formel vom Grad 7 für  $T_2$  zu berechnen, braucht man die Polynome  $B_2, B_3^1, B_3^2, B_4, B_5^1, B_5^2, B_6^1, B_6^2, B_6^3$ . Ein Ansatz mit 8 Parametern für eine Formel mit 4 Koronen ist:

$$\begin{aligned} Q_1 &:= B_4, \\ Q_2 &:= B_5^1 + aB_3^1 + bB_3^2, \\ Q_3 &:= B_5^2 + cB_3^1 + dB_3^2, \\ Q_4 &:= B_6^2 + eB_6^3 + fB_3^1 + gB_3^2 + hB_2. \end{aligned}$$

Der Ansatz nach Satz 3.10 hat aber nur 2 Parameter.

Nach Satz 1.13 ist die minimale Knotenzahl für eine Kubaturformel vom Grad 7 fürs Dreieck  $T_2$  12. Für die Konstruktion einer  $Ro_3$ -invarianten Formel mit minimaler Knotenzahl benötigt man die gemeinsamen Nullstellen von 3 orthogonalen Polynomen vom Grad 4, die einen dreidimensionalen,  $Ro_3$ -invarianten Raum aufspannen.  $Ro_3$  hat 3 irreduzible Darstellungen, deren Charaktere in 2 Fällen nichtreell sind (siehe Abschnitt 2.6, 2.7 und 3.1). Also zerfällt  $K_4 \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$  in zwei  $Ro_3$ -invariante Unterräume:

$$K_4 = K_4^1 \oplus V_4^{23} \text{ mit}$$

$$K_4^1 = \text{span}(h_{41}^1) \quad \text{und} \quad V_4^{23} = \text{span}(g_1, g_2, g_3, g_4)$$

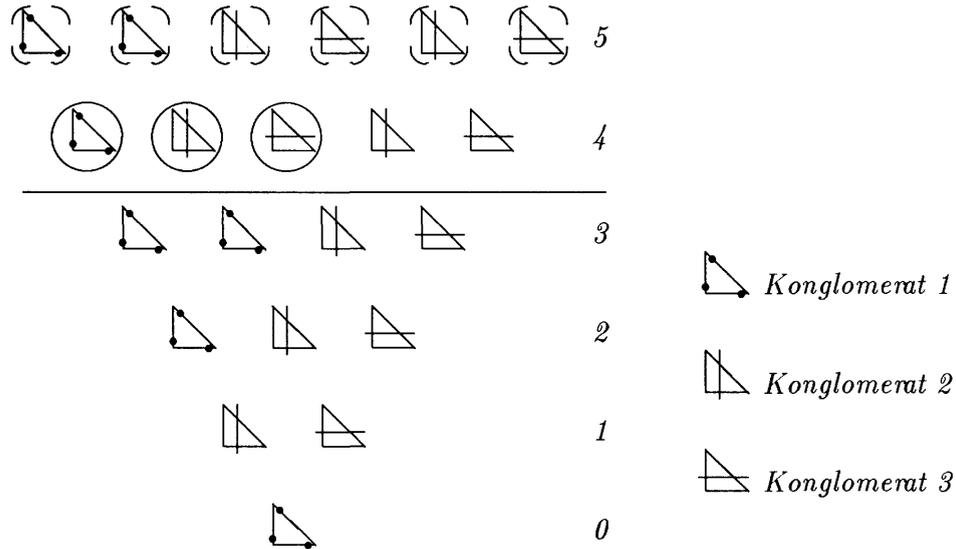


Abbildung 4.1:  $Ro_3$ -invariantes Ideal

mit  $h_{41}^1 = P^{4,0} + 2P^{3,1} + 3P^{2,2} + 2P^{1,3} + P^{0,4}$  und

$$g_1 = P^{4,0} + P^{0,4} + 2P^{3,1} + 2P^{1,3}, \quad g_3 = P^{4,0} - P^{0,4},$$

$$g_2 = P^{3,1} + P^{1,3} + 2P^{2,2}, \quad g_4 = P^{3,1} - P^{1,3}.$$

Fasst man  $V_4^{23}$  als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum auf, so ist seine kanonische Zerlegung

$$V_4^{23\mathbb{C}} = K_4^{2\mathbb{C}} \oplus K_4^{3\mathbb{C}} \quad \text{mit} \quad K_4^{2\mathbb{C}}, K_4^{3\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}[x, y]$$

(siehe dazu Paragraph 2.7). Sei

$$K_4^{2\mathbb{C}} = \text{span}(h_{41}^2, h_{42}^2) \quad \text{und}$$

$$K_4^{3\mathbb{C}} = \text{span}(h_{41}^3, h_{42}^3) \quad \text{mit} \quad h_{41}^3 = \overline{h_{41}^2}, h_{42}^3 = \overline{h_{42}^2}.$$

Weil die Charaktere  $\psi_2$  und  $\psi_3$  der irreduziblen Darstellungen konjugiert komplex zueinander sind und  $\rho$  eine reelle Darstellung ist, gilt für  $p \in K_4^{2\mathbb{C}}$  also  $\bar{p} \in K_4^{3\mathbb{C}}$ , sowie  $p + \bar{p}, i(p - \bar{p}) \in \mathbb{R}[x, y] \cap V_4^{23}$ .

$$p_1^{23} = g_1 + ag_3 + bg_4 \quad \text{und} \quad p_2^{23} = \rho(r)(p_1^{23})$$

erzeugen für feste Parameter  $a, b \in \mathbb{R}$  einen  $Ro_3$ -invarianten, zweidimensionalen, reellen Raum. Damit sind alle zweidimensionalen,  $Ro_3$ -invarianten,

reellen Unterräume von  $V_4^{23}$  erfaßt. Als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum hat  $V_4^{23}$  ein-, zwei- und dreidimensionale,  $Ro_3$ -invariante Unterräume, als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum außer  $\{0\}$  und  $V_4^{23}$  selbst nur zweidimensionale,  $Ro_3$ -invariante Unterräume.

Aus  $xp_1^{23}, x^2p_1^{23}, yp_1^{23}, y^2p_1^{23}$  erhält man durch Projektion  $Ro_3$ -invariante Polynome vom Grad 5 und 6. Mit REDUCE können jetzt die Basisinvarianten  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  substituiert werden. Ab Schritt 3.) werden alle Schritte des Konstruktionsweges mit Gröbner-Basen durchgeführt. Die Basis  $g_1, g_2, g_3, g_4$  und der Ansatz  $p_1^{23}$  wurde so geschickt gewählt, daß sich für  $(-a, -b)$  genau die gespiegelten Knoten als für  $(a, b)$  ergeben. Dadurch haben die Gleichungen für die Parameter nach Schritt 3.) die Symmetrie, daß mit  $(a, b)$  auch  $(-a, -b)$  eine Lösung ist. In den Gleichungen treten also nur gerade oder nur ungerade Monome auf. Die Lösung  $a = \frac{29}{34}b, b^2 = \frac{3468}{1631}$  ergibt die  $Ro_3$ -invariante Formel aus [29].

# Kapitel 5

## Verallgemeinerte Kronrod-Formeln

Für eindimensionale Integrale über ein Intervall gibt es Kronrod-Formeln. Das sind Formeln, die die Knoten einer Gaußformel niedrigeren Grades enthalten. Die Differenz beider Formeln wird als Fehlerabschätzung in adaptiven Verfahren verwendet.

Auch für mehrdimensionale Integrale gibt es solche Formelpaare und adaptive Verfahren. Das in Kapitel 3 hergeleitete Konstruktionsprinzip mit Hilfe von linearen Darstellungen wird in diesem Kapitel darauf spezialisiert, eine  $G$ -invariante Formel  $Q_2$  vom Grad  $d_2$  zu bestimmen, die die Knoten einer  $G$ -invarianten Formel  $Q_1$  vom Grad  $d_1 < d_2$  wiederverwendet.

### 5.1 Paare

**Definition 5.1** : Sind  $Q_1$  eine Kubaturformel vom Grad  $d_1$  und  $Q_2$  eine Kubaturformel vom Grad  $d_2 > d_1$  mit der Eigenschaft, daß die Knoten von  $Q_1$  auch Knoten von  $Q_2$  sind, so spricht man von einem **Paar** von Kubaturformeln.

Sind  $Q_1, Q_2$  und  $Q_2, Q_3$  jeweils ein Paar, so nennt man  $Q_1, Q_2, Q_3$  eine **Sequenz**.

Geht man davon aus, daß  $Q_2(f) - Q_1(f)$  die gleiche Größenordnung hat wie der Fehler  $I(f) - Q_1(f)$ , so kann man  $Q_2 - Q_1$  als Schätzung für den Fehler in

Programm	$\Omega$	Formeln	Referenz
CUBTRI	$T_2$	$d_1 = 5, n_1 = 7,$ $d_2 = 8, n_2 = 19$	Laurie [43]
TRIEX	$T_2$	$d_1 = 9, n_1 = 19,$ $d_2 = 11, n_2 = 28$	de Doncker/Robinson [21], [22]
TWODQD	$T_2$	$d_1 = 9, n_1 = 19,$ $d_2 = 11, n_2 = 28$	Kahaner/Rechard [41]
HALF	$C_N$	$d_1 = 5, d_2 = 7$	van Dooren/de Ridder [23]
ADAPT	$C_N$	$d_1 = 5, d_2 = 7$	Genz/Malik [31]

Tabelle 5.1: Adaptive Programme

adaptiven Verfahren verwenden. Paare haben gegenüber 2 beliebigen Kubaturformeln den Vorteil, relativ wenig Funktionsauswertungen zu benötigen.

In Davis und Rabinowitz [20] S. 450ff werden adaptive, numerische Integrationsprogramme aufgeführt. Einige Programme, die verschiedene Formeln zur Fehlerabschätzung benutzen, sind in Tabelle 5.1 aufgelistet.

Die Sequenzen für  $T_2, T_3(T_N)$  von Grundmann und Möller [33] sind in der Programmbibliothek NAG implementiert.

Für den Würfel  $C_3$  haben Berntsen und Espelid [3]  $(Z_2 \times A_4)$ -invariante Paare vom Grad 7 und 9 berechnet.

Unter anderem gibt es 2 wichtige Wege, Paare zu konstruieren:

**von unten nach oben:** Ist eine Formel  $Q_1$  vom Grad  $d_1$  gegeben, versucht man Knoten so zu ergänzen, daß eine Kubaturformel  $Q_2$  vom Grad  $d_2 > d_1$  mit den Knoten von  $Q_1$  existiert (siehe Paragraph 5.2).

**von oben nach unten:** Für eine gegebene Kubaturformel  $Q_2$  vom Grad  $d_2$  wird geprüft, ob bei Vernachlässigung einiger Knoten, die Gewichte der restlichen so bestimmt werden können, daß die neue Formel  $Q_1$  den Grad  $d_1 < d_2$  hat. Dieser Weg wird von Cools und Haegemans [17] besprochen.

Der zweite Weg wird verständlich, wenn man sich Satz 1.5 und den Beweis dazu genauer ansieht. Sei  $\mathcal{A}$  das Ideal der Polynome, die in den  $n_2$  Knoten der Kubaturformel  $Q_2$  verschwinden und sei  $n_2 = H(d_2, \mathcal{A})$ . Dann verschwindet das Integral  $I$  auf  $\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_{d_1}$  mit  $d_1 < d_2$ . Um eine Kubaturformel vom Grad  $d_1$  mit Hilfe der  $n_2$  Knoten zu konstruieren, löst man für die Gewichte ein lineares Gleichungssystem mit  $H(d_1, \mathcal{A})$  Gleichungen. Ist

$$n_2 = H(d_2, \mathcal{A}) = H(d_1, \mathcal{A}),$$

so sind die Gewichte eindeutig bestimmt. Es entsteht wieder  $Q_2$ . Gilt aber

$$H(d_1, \mathcal{A}) \leq H(d_2, \mathcal{A}) - 1,$$

so bilden die Lösungen des linearen Gleichungssystems einen affinen Raum. Diese Freiheit kann dazu benutzt werden, ein oder mehrere Gewichte zu Null zu machen. Sind die Gewichte von  $Q_2$  alle positiv, so können auch alle Gewichte von  $Q_1$  positiv sein (Cools/Haegemans [17] Theorem 10).

Ist  $Q_2$   $G$ -invariant, so ist  $Q_1$  nicht notwendig auch  $G$ -invariant. Man betrachte dazu Satz 4.14. Sei  $Q_2$  vom Grad  $d_2$   $G$ -invariant und  $\mathcal{A}^G$  das Ideal der  $G$ -invarianten Polynome, die in den Knoten von  $Q_2$  verschwinden. Ist die Kodimension von  $\mathcal{A}^G \cap \mathbb{P}_{d_1}$  in  $\mathbb{P}_{d_1}^G$  echt kleiner als die Kodimension von  $\mathcal{A}^G \cap \mathbb{P}_{d_2}$  in  $\mathbb{P}_{d_2}^G$ , so gibt es eine  $G$ -invariante Kubaturformel  $Q_1 \neq Q_2$  vom Grad  $d_1$ , deren Knoten auch Knoten von  $Q_2$  sind. Man siehe dazu auch Satz 5.7 in Cools [18] S. 160.

Für Paare vom Grad  $2\nu - 1$  und  $2\nu + 1$  gibt es eine untere Schranke für die Gesamtanzahl der Knoten (Cools/Haegemans [16]) unter der Voraussetzung, daß die Gewichte jeweils zu einem Knoten in  $Q_1$  und  $Q_2$  verschieden sind. Für Paare von  $G$ -invarianten Kubaturformeln gibt es analog eine untere Schranke für die Gesamtzahl an  $G$ -Koronen (Cools [18] S. 155).

## 5.2 Paare, konstruiert mit linearen Darstellungen von unten nach oben

In diesem Paragraphen wird das Konstruktionsprinzip aus Paragraph 3.3 auf die Konstruktion einer  $G$ -invarianten Kubaturformel erweitert, für die vorgegebene Knoten verwendet werden sollen.

Sei das Integral  $I$  wie auch in den vorherigen Kapiteln als  $G$ -invariant und positiv vorausgesetzt. Sei  $Q_1$  eine  $G$ -invariante Kubaturformel vom Grad

$d_1$  und  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}[\underline{x}]$  das zugehörige Ideal der Polynome, die in den Knoten verschwinden.

Um eine  $G$ -invariante Kubaturformel vom Grad  $d_2 > d_1$  zu berechnen, die die Knoten von  $Q_1$  auch als Knoten hat, kann man analog zum Konstruktionsprinzip in Kapitel 3 folgendermaßen vorgehen. Man bestimmt linear unabhängige Polynome  $p_1, \dots, p_m$  mit den folgenden Eigenschaften:

- i.)  $p_j \in \mathcal{D}$ ,  $j = 1, \dots, m$ .
- ii.)  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  sind  $d_2$ -orthogonal.
- iii.) Jedes Polynom  $p_j$  ist Element je eines Konglomerates  $V_i$ . Ist  $V_i$  ein Konglomerat, das zu einer mehrdimensionalen, irreduziblen Darstellung gehört, so sei eine symmetriegerechte Basis gewählt. Ist  $V_i$  ein reelles Konglomerat, das zu zwei zueinander konjugiert komplexen, irreduziblen Darstellungen gehört, und ist  $p_j \in V_i$ , so ergänzt man weitere  $p_k$ , die zusammen mit  $p_j$  eine Basis eines  $G$ -invarianten, reellen Vektorraumes bilden.
- iv.) Die Polynome  $p_1, \dots, p_m$  bilden eine H-Basis von  $\mathcal{A} := (p_1, \dots, p_m)$ .
- v.) Die gemeinsamen Nullstellen von  $p_1, \dots, p_m$  sind reell und einfach.

Wegen ii.), iv.) und v.) gibt es nach Satz 1.10 eine Kubaturformel  $Q_2$  vom Grad mindestens  $d_2$  mit den gemeinsamen Nullstellen als Knoten. Wegen iii.) ist das Ideal  $\mathcal{A} = (p_1, \dots, p_m)$   $G$ -invariant. Damit ist die Nullstellenmenge  $G$ -invariant und nach Satz 3.6 gibt es eine  $G$ -invariante Kubaturformel  $Q_2$  vom Grad  $d_2$ . Wegen der Bedingung i.) sind die Knoten von  $Q_1$  auch Knoten von  $Q_2$ .

Bedingung iii.) bedeutet keine Einschränkung der möglichen Kubaturformeln, da nach Satz 3.7 für jedes  $G$ -invariante Ideal eine H-Basis aus den Konglomeraten existiert.

Die 3 ersten Bedingungen realisiert man in REDUCE am einfachsten dadurch, daß man einen linearen Ansatz an  $d_2$ -orthogonalen Polynomen im  $i$ -ten Konglomerat macht, die Knoten von  $Q_1$  einsetzt und die Lösung bestimmt, falls es eine gibt.

**Satz 5.2** : Sei das Integral  $I$  zweidimensional und  $D_4$ -invariant. Sei  $Q_1$  eine  $D_4$ -invariante Kubaturformel vom Grad  $d_1 = 2\nu - 1$  mit  $n_{min}$  oder  $n_{min} + 1$

*Knoten.*

$$n_{\min} := \binom{\nu+1}{2} + \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$$

sei dabei die minimale Knotenzahl für eine Kubaturformel vom Grad  $2\nu - 1$  aus Satz 1.13. Dann gibt es 2 linear unabhängige, orthogonale Polynome vom Grad  $\nu + 1$ , die in den Knoten von  $Q_1$  verschwinden und einen  $D_4$ -invarianten Raum aufspannen. Sind die gemeinsamen Nullstellen reell und paarweise verschieden, so gibt es eine  $D_4$ -invariante Kubaturformel vom Grad  $2\nu + 1$  mit den Nullstellen als Knoten.

BEWEIS: Im Ideal  $\mathcal{D}$ , das zu  $Q_1$  gehört, gibt es ein Fundamentalsystem vom Grad  $\nu + 1$ , weil  $\mathcal{D}$   $n_{\min}$  oder  $n_{\min} + 1$  Nullstellen hat. Die Polynome  $R_j$ ,  $j = 0, \dots, \nu + 1$  im Fundamentalsystem sind  $(2\nu - 1)$ -orthogonal, also wegen Lemma 1.4 Elemente von  $K_{\nu+1} + K_\nu + K_{\nu-1}$ . Gesucht sind zwei orthogonale Polynome  $p_1, p_2$  vom Grad  $\nu + 1$ , die Linearkombinationen der  $R_j$  sind und einen  $D_4$ -invarianten, zweidimensionalen Raum aufspannen. Haben  $p_1$  und  $p_2$  dann  $(\nu + 1)^2$  gemeinsame Nullstellen, die reell und einfach sind, so bilden sie nach Satz 1.11 von Max Noether eine H-Basis von  $\mathcal{A} = (p_1, p_2)$  und nach Satz 1.10 und Satz 3.6 gibt es eine  $D_4$ -invariante Kubaturformel vom Grad  $2\nu + 1$  mit den Nullstellen als Knoten. Um zu untersuchen, ob derartige  $p_1$  und  $p_2$  existieren, ist eine Fallunterscheidung notwendig.

**1. Fall:**  $\nu$  ist gerade. Dann sind  $\nu + 1$  und  $\nu - 1$  ungerade und es gelten

$$K_{\nu+1} = K_{\nu+1}^5, \quad K_\nu^5 = \{0\}, \quad K_{\nu-1} = K_{\nu-1}^5.$$

Für  $K_{\nu+1}^5$  bzw.  $K_{\nu-1}^5$  seien  $h_{\nu+1,j}^5, j = 0, 1, \dots, \nu + 1$  und  $h_{\nu-1,j}^5, j = 0, 1, \dots, \nu - 1$  eine symmetriegerechte Basis, wobei jeweils  $h_{\nu+1,2i}^5, h_{\nu+1,2i+1}^5$  bzw.  $h_{\nu-1,2i}^5, h_{\nu-1,2i+1}^5$  einen zweidimensionalen,  $D_4$ -invarianten Raum aufspannen. Das Fundamentalsystem vom Grad  $\nu + 1$  in  $\mathcal{D}$  kann so gewählt werden, daß es einen  $D_4$ -invarianten Raum erzeugt. Es gibt also  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, \frac{\nu}{2}$ ,  $j = 0, \dots, \frac{\nu}{2} - 1$ , so daß

$$R_{2i} = h_{\nu+1,2i}^5 + \sum_{j=0}^{\frac{\nu}{2}-1} h_{\nu-1,2j}^5 a_{i,j}, \quad i = 0, \dots, \frac{\nu}{2},$$

$$R_{2i+1} = h_{\nu+1,2i+1}^5 + \sum_{j=0}^{\frac{\nu}{2}-1} h_{\nu-1,2j+1}^5 a_{i,j}, \quad i = 0, \dots, \frac{\nu}{2}$$

ein Fundamentalsystem vom Grad  $\nu + 1$  in  $\mathcal{D}$  bilden. Da es  $\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor + 1$  viele  $R_{2i}$  gibt, aber die Dimension von  $K_{\nu-1}^5$  nur  $2 \cdot \lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor$  ist, ist es möglich, nichttriviale Linearkombinationen

$$p_1 := \sum_{i=0}^{\frac{\nu}{2}} b_i R_{2i}, \quad p_2 := \sum_{i=0}^{\frac{\nu}{2}} b_i R_{2i+1}, \quad b_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, \frac{\nu}{2}$$

zu finden, so daß  $p_1$  und  $p_2$  orthogonal sind und eine symmetriegerechte Basis eines zweidimensionalen,  $D_4$ -invarianten Raumes bilden.

**2. Fall:**  $\nu$  ist ungerade. Dann betrachtet man die kanonischen Zerlegungen

$$\begin{aligned} K_{\nu+1} &= K_{\nu+1}^1 \oplus K_{\nu+1}^2 \oplus K_{\nu+1}^3 \oplus K_{\nu+1}^4, \\ K_{\nu} &= K_{\nu}^5, \\ K_{\nu-1} &= K_{\nu-1}^1 \oplus K_{\nu-1}^2 \oplus K_{\nu-1}^3 \oplus K_{\nu-1}^4. \end{aligned}$$

Es gilt entweder

$$\dim K_{\nu+1}^1 = \dim K_{\nu-1}^1 + 1 \quad \text{und} \quad \dim K_{\nu+1}^2 = \dim K_{\nu-1}^2 + 1$$

für  $\nu = 4k - 1$  oder

$$\dim K_{\nu+1}^3 = \dim K_{\nu-1}^3 + 1 \quad \text{und} \quad \dim K_{\nu+1}^4 = \dim K_{\nu-1}^4 + 1$$

für  $\nu = 4k + 1$ . Es gibt also 2 orthogonale Polynome  $p_1, p_2 \in K_{\nu+1} \cap \mathcal{D}$ , die einen zweidimensionalen,  $D_4$ -invarianten Raum erzeugen. Entweder sind sie aus den Konglomeraten 1 und 2 oder aus 3 und 4.

Aus dem Satz 1.11 von Max Noether mit Satz 1.10 folgt dann die Existenz einer  $D_4$ -invarianten Kubaturformel vom Grad  $2\nu + 1$ , wenn die Knoten reell und einfach sind. Das ist allerdings für  $p_1 \in K_{\nu+1}^3, p_2 \in K_{\nu+1}^4$  nicht der Fall, da  $(0, 0)$  eine mehrfache Nullstelle ist. ■

Cools und Haegemans [7] konnten einen analogen Satz wie Satz 5.2 nur für  $Z_2$  statt mit  $D_4$  zeigen.

**Beispiel 5.3 :** Für andere Symmetriegruppen wie z. B.  $D_3$  kann man analoge Überlegungen wie im Beweis von Satz 5.2 anstellen. In Beispiel 3.12 wurde bereits die  $D_3$ -invariante Kubaturformel  $T_2 : 5 - 1$  von Radon behandelt. Die Knoten dieser Formel vom Grad 5 sind die Nullstellen der orthogonalen Polynome  $h_{31}^2, h_{31}^3, h_{32}^3$  vom Grad 3. Gibt es eine  $D_3$ -invariante Kubaturformel vom Grad 7, die diese Knoten wiederverwendet ?

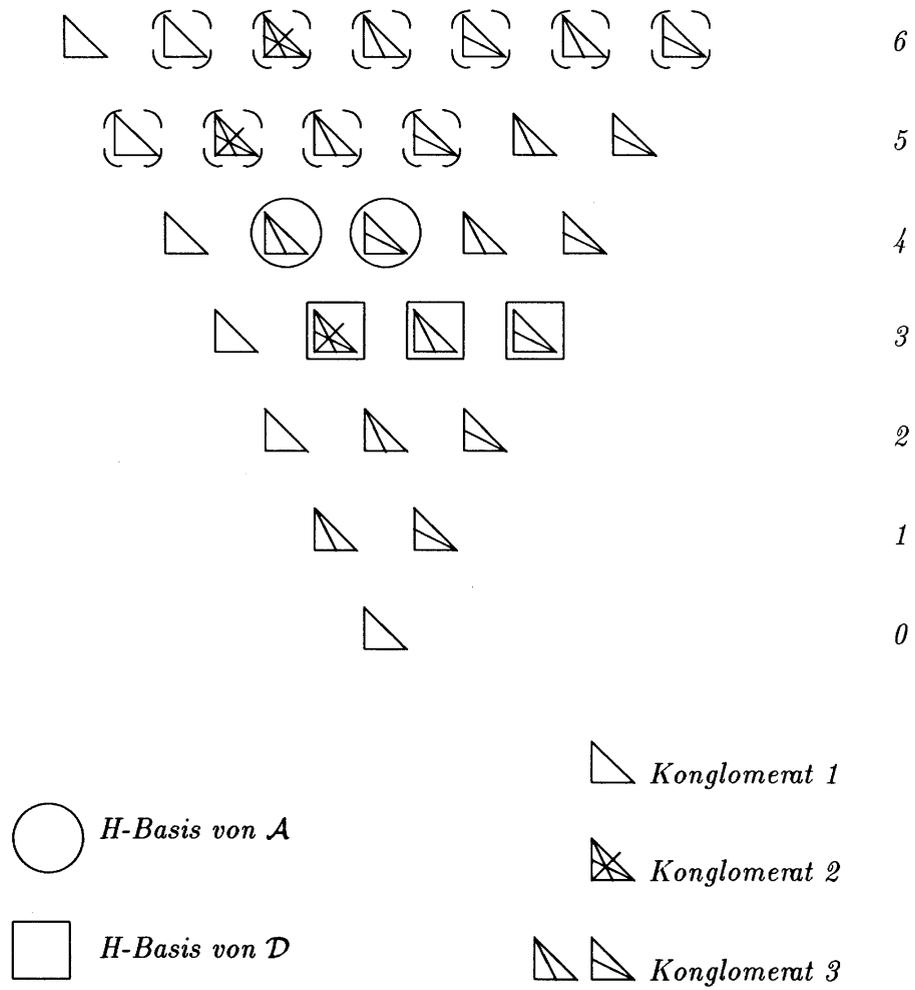


Abbildung 5.1:  $D_3$ -invariante Ideale zum Paar von Cools/Haegemans

Die Ideale werden im Bild 5.1 illustriert. Man überprüft, ob die Bedingungen i.), ii.) und iii.) erfüllbar sind. Dazu betrachtet man die kanonischen Zerlegungen von  $K_4$  und  $K_2$  :

$$\begin{aligned} K_4 &= K_4^1 + K_4^3, \\ K_2 &= K_2^1 + K_2^3 \quad \text{mit} \\ K_4^3 &= \text{span}(h_{41}^3, h_{42}^3, h_{43}^3, h_{44}^4), \\ K_2^3 &= \text{span}(h_{21}^3, h_{21}^3). \end{aligned}$$

Dabei soll im Konglomerat 3 jeweils eine symmetriegerechte Basis vorliegen. Polynome  $R_i \in \mathcal{D} = (h_{31}^2, h_{31}^3, h_{32}^3)$  vom Grad 4 sind 5-orthogonal, also Elemente von  $K_4 + K_3 + K_2$ . Da  $\mathcal{D}$   $D_3$ -invariant ist, sind die  $R_i$  in einem Konglomerat wählbar. Da  $\mathcal{D}$  fundamental vom Grad 4 ist, gibt es 5-orthogonale Polynome vom Grad 4 in  $\mathcal{D}$  im Konglomerat 3 der Darstellung

$$\begin{aligned} R_1 &= h_{41}^3 + a h_{21}^3, \\ R_2 &= h_{42}^3 + a h_{22}^3, \\ R_3 &= h_{43}^3 + b h_{21}^3, \\ R_4 &= h_{44}^3 + b h_{22}^3, \end{aligned}$$

mit geeigneten  $a, b \in \mathbb{R}$ . Es gibt also zwei orthogonale Polynome vom Grad 4 (Linearkombinationen von  $R_1$  und  $R_3$  sowie  $R_2$  und  $R_4$ ), die eine symmetriegerechte Basis eines  $D_3$ -invarianten Raumes vom Symmetrietyp 3 bilden. Sie haben 16 reelle, gemeinsame Nullstellen. Nach dem Satz 1.11 von Max Noether bilden sie eine H-Basis und es gibt nach Satz 1.10 und Satz 3.6 eine  $D_3$ -invariante Kubaturformel vom Grad 7 mit diesen Nullstellen als Knoten. Das ist das Paar von Cools/Haegemans [15]. Siehe auch Beispiel 5.5.

In den bisherigen Beispielen wurde der Satz 1.11 von Max Noether benutzt, um H-Basen zu finden. Im folgenden werden H-Basen konstruiert, die mehr Polynome enthalten als es Variable gibt.

Man macht einen Ansatz  $p_1, \dots, p_m$ , der von Parametern abhängt und die Bedingungen i.), ii.) und iii.) erfüllt. Welche notwendigen Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die Polynome im Ansatz eine H-Basis bilden, ergibt sich aus Satz 3.19.

Angenommen  $p_1, \dots, p_m$  haben den gleichen Grad  $\nu \geq \lfloor \frac{d_2}{2} \rfloor + 1$  und sind linear unabhängig. Sei  $E := \text{span}(p_1, \dots, p_m)$  und  $\mathbb{P}_k = \sum_{\mu=0}^k M_\mu$ , wobei

$$\mathbb{P}_j = \sum_{\mu=0}^j M_\mu \quad \text{für } j = 0, \dots, k$$

gilt. Für  $\mu = 0, \dots, k-1$  sei

$$\dim M_\mu \odot E = \dim M_\mu \cdot \dim E \quad \text{und} \quad M_\mu \odot E \cap \mathbb{P}_{\nu+\mu-1} = \{0\}$$

erfüllt. Mit anderen Worten: Es ergibt sich bis zum Grad  $k-1$  keine notwendige Bedingung dafür, daß  $p_1, \dots, p_m$  eine H-Basis bilden (siehe Beispiel 1.9).

Sei  $\mathcal{A} := (p_1, \dots, p_m)$  sowie  $M := \mathbb{P}_k$  und sei  $M \odot E$  fundamental vom Grad  $\nu+k$ .

Bilden  $p_1, \dots, p_m$  eine H-Basis von  $\mathcal{A}$ , so gilt für  $A := \mathcal{A} \cap \mathbb{P}_{\nu+k-1}$  nach dem vorherigen Abschnitt  $A = E \odot \mathbb{P}_{k-1}$ . Der Charakter  $\chi^B$  zugehörig zu einem  $G$ -invarianten, direkten Komplements  $B$  von  $A$  in  $\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_{\nu+k}$  ist dann gleich dem Charakter von  $M_{\nu+k}$ , weil  $M \odot E$  fundamental vom Grad  $\nu+k$  ist. Nach Satz 3.19 ist der Charakter des Syzygienraumes  $Y$  zu

$$\chi^Y = \chi^M \cdot \chi^E - \chi^A - \chi^B$$

bekannt. Gilt für die Vielfachheit  $c_i^Y > 0$  aus der vollen Ausreduktion  $\chi^Y = \sum c_i^Y \chi^i$ , so berechnet man in diesem  $i$ -ten Konglomerat  $c_i^Y$  Polynome  $Q_j^i \in M \odot E$ , die im Falle einer H-Basis Darstellungen des Nullpolynoms, also Syzygien, sein müßten. Man berechnet also durch systematische Gradreduktion Polynome  $Q_j^i \in M \odot E$  vom Grad  $\leq \nu-1$  (bzw. vom Grad  $\nu+k-1$  ohne homogene Anteile von Polynomen aus dem  $i$ -ten Konglomerat von  $E \odot \mathbb{P}_{k-1}$ ). Die  $Q_j^i$  seien so gewählt, daß sie zusammen mit  $\rho(t)(Q_j^i), t \in G$  einen  $G$ -invarianten Raum der Dimension  $c_i^Y \cdot n_i$  erzeugen, wobei  $n_i$  die Dimension der irreduziblen Darstellung  $\rho^i$  ist (bzw. die Dimension von zwei zueinander konjugiert komplexen irreduziblen Darstellungen ist). Aus  $Q_j^i = 0$  ergeben sich die Gleichungen für die Parameter. Wieviele Gleichungen sind das?

Dazu muß man bedenken, daß  $Q_j^i \in \mathcal{D}$  gilt und die Polynome  $Q_j^i$  Linearkombinationen von  $d_2$ -orthogonalen Polynomen sind.

Weil jedes Produkt  $q \cdot p$  mit  $q \in M, p \in E$   $d_2$ -orthogonal ist, gilt nach Lemma 1.4

$$M \odot E \subset \sum_{\mu=d_2-\nu-k+1}^{\nu+k} K_\mu.$$

Da jedes  $Q_j^i \in M \odot E$  höchstens den Grad  $\nu+k-1$  hat, gilt

$$Q_j^i \in W := \mathcal{D} \cap \sum_{\mu=d_2-\nu-k+1}^{\nu+k-1} K_\mu.$$

Die vollen Ausreduktionen von  $W$  und  $A = \mathbb{P}_{k-1} \odot E$  seien

$$\chi^W = \sum_{i=1}^h c_i^W \chi^i, \quad \chi^A = \sum_{i=1}^h c_i^A \chi^i.$$

Aus  $Q_i^j = 0$  ergeben sich wegen  $Q_j^i \in V$  ( $W = A \oplus V$ )

$$\sum_{i=1}^h \sum_{j=0}^{c_i^Y-1} (c_i^W - c_i^A - j)_+ \quad (5.1)$$

Gleichungen für die Parameter. Dabei gilt  $(x)_+ = x$  für  $x \geq 0$ ,  $(x)_+ = 0$  für  $x < 0$ . Dann sind notwendige Bedingungen dafür erfüllt, daß  $p_1, \dots, p_m$  eine H-Basis bilden.

Bestimmt man die Parameter teilweise so, daß die  $Q_j^i$   $d_2$ -orthogonal sind, so kann man sie in den Ansatz aufnehmen und die restlichen Parameter so bestimmen, daß alle zusammen eine H-Basis bilden. Alle  $Q_j^i$  sind  $d_2$ -orthogonal, wenn

$$\sum_{i=1}^h \sum_{j=0}^{c_i^Y-1} (c_i^{\tilde{W}} - j)_+ \quad (5.2)$$

Gleichungen erfüllt sind. Dabei sei  $\sum_{i=1}^h c_i^{\tilde{W}} \chi^i$  die volle Ausreduktion von

$$\tilde{W} := \mathcal{D} \cap \sum_{\mu=d_2-\nu-k+1}^{\nu-1} K_\mu.$$

In den folgenden Beispielen sind die beiden Anzahlen (5.1) und (5.2) gleich, und zwar gleich 1.

Eventuell muß man weitere notwendige Bedingungen für  $M = \mathbb{P}_{k+1}$  aufstellen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß man bereits einige Syzygien aus der Stufe  $M = \mathbb{P}_k$  kennt. Ist  $Q_j^i = 0$ , so ist auch  $qQ_j^i = 0$  mit  $q \in \mathbb{P}_1$ .

Haben die Polynome  $p_1, \dots, p_m$  verschiedenen Grad, so muß man die Überlegungen modifizieren. Angenommen  $p_1, \dots, p_l$  haben den Grad  $\nu$  und  $p_{l+1}, \dots, p_m$  haben den Grad  $\nu + 1$ . Statt  $\mathbb{P}_k \odot E$  hat man

$$\mathbb{P}_k \odot E_1 + \mathbb{P}_{k-1} \odot E_2$$

mit  $E_1 = \text{span}(p_1, \dots, p_l)$ ,  $E_2 = \text{span}(p_{l+1}, \dots, p_m)$  zu betrachten.

Da man die Anzahl der Parameter kennt und (5.2) berechnet werden kann, bevor man die Kandidaten für die Syzygien  $Q_j^i$  aufstellt, kann man ohne Rechnung vorhersagen, ob der Ansatz Erfolgsaussichten hat. Bei der Vorhersage benutzt man, daß nichtlineare Gleichungssysteme mit mehr Gleichungen als Unbekannte in der Regel keine Lösung haben.

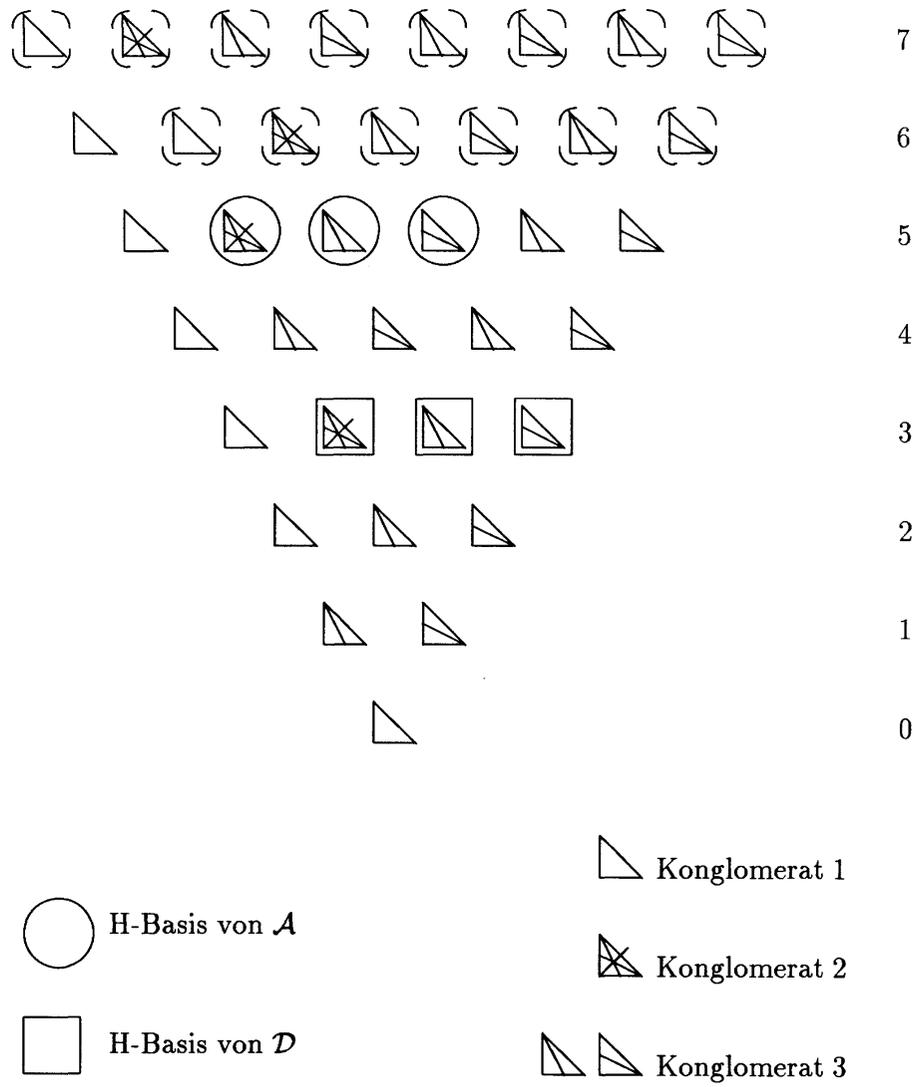


Abbildung 5.2:  $D_3$ -inv. Ideale zum Paar mit  $d_1 = 5, d_2 = 8, n_1 = 7, n_2 = 19$

**Beispiel 5.4** : Ausgehend von der  $D_3$ -invarianten Kubaturformel vom Grad 5 mit 7 Knoten von Radon für  $T_2$  (siehe Beispiel 3.12) werden in diesem Beispiel zwei  $D_3$ -invariante Kubaturformeln konstruiert, die den Grad 8 haben und die Knoten der ersten Formel auch als Knoten enthalten. Die zugehörigen Ideale werden in Bild 5.2 veranschaulicht. Es gilt also

$$d_1 = 5, \quad d_2 = 8, \quad n_1 = 7, \quad \mathcal{D} = (h_{31}^2, h_{31}^3, h_{32}^3).$$

Es ist ein Ansatz für eine  $H$ -Basis zu finden, der die Bedingungen i.), ii.) und iii.) erfüllt.  $p_1, \dots, p_m$  müssen also 8-orthogonale Polynome sein, die in  $\mathcal{D}$  und jeweils einem Konglomerat  $V_1, V_2$  oder  $V_3$  enthalten sind.

$$h_{51}^2 := P^{5,0} - P^{0,5} + P^{3,2} - P^{2,3} + \frac{5}{2}(P^{4,1} - P^{1,4})$$

wird mittels der Projektionen von Satz 2.8 berechnet.  $h_{51}^2$  vom Symmetriotyp 2 ist orthogonal und es gilt  $h_{51}^2 \in \mathcal{D}$ , weil  $h_{51}^2$  auf den Seitenhalbierenden verschwindet und die Knoten der Formel von Radon auf diesen Seitenhalbierenden liegen. Wir nehmen also  $p_1 := h_{51}^2$  in den Ansatz auf.  $\mathcal{D} \cap \mathbb{P}_5$  hat den zugehörigen Charakter  $2\psi_1 + 2\psi_2 + 5\chi$  (Bezeichnungen der Charaktere wie in Paragraph 2.6). Wegen Lemma 1.4 gilt

$$\mathcal{D} \cap \mathbb{P}_5 \cap V_3 \subset \sum_{j=1}^5 K_j^3.$$

Da  $\sum_{j=1}^3 K_j^3$  den zugehörigen Charakter  $3\chi$  hat, hat  $\mathcal{D} \cap (K_5^3 + K_4^3)$  den Charakter  $2\chi$ , also die Dimension 4.

Wähle also  $p_2, p_3 \in (K_5^3 + K_4^3) \cap \mathcal{D}$  in Abhängigkeit eines Parameters  $a$ , so daß  $p_2$  und  $p_3$  vom Grad 5 eine symmetriegerechte Basis bilden und 8-orthogonal sind. Sei  $E := \text{span}(p_1, p_2, p_3)$  und  $M := \mathbb{P}_2$ . Es gilt

$$\chi^E \cdot \chi^M = (\psi_2 + \chi)(2\psi_1 + 2\chi) = 2\psi_1 + 4\psi_2 + 6\chi$$

nach der Charakterprodukttable 2.1 und für  $A = \mathbb{P}_1 \odot E$

$$\chi^A = \psi_1 + 2\psi_2 + 3\chi \quad \text{und} \quad \chi^B = \chi^{K_7} = \psi_1 + \psi_2 + 3\chi.$$

Dabei sei  $B$  ein  $D_3$ -invariantes, direktes Komplement von  $A$  in  $\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_7$ , falls  $p_1, p_2, p_3$  eine  $H$ -Basis von  $\mathcal{A} = (p_1, p_2, p_3)$  bilden. Nach Satz 3.19 gilt für den Syzygienraum  $Y$

$$\chi^Y = \chi^E \cdot \chi^M - \chi^A - \chi^B = \psi_2.$$

$x$	$y$	$1 - x - y$	<i>Gewicht</i>
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$9.4861 \cdot 10^{-2}$
$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}$	$4.3800 \cdot 10^{-2}$
$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}$	$-1.4226 \cdot 10^0$
$\frac{5(5+\sqrt{15}+\sqrt{7})+\sqrt{15}\sqrt{7}}{90}$	$\frac{5(5+\sqrt{15}+\sqrt{7})+\sqrt{15}\sqrt{7}}{90}$	$\frac{5(4-\sqrt{15}-\sqrt{7})-\sqrt{15}\sqrt{7}}{45}$	$8.4938 \cdot 10^{-6}$
$\frac{5(5-\sqrt{15}+\sqrt{7})-\sqrt{15}\sqrt{7}}{90}$	$\frac{5(5-\sqrt{15}+\sqrt{7})-\sqrt{15}\sqrt{7}}{90}$	$\frac{5(4+\sqrt{15}-\sqrt{7})+\sqrt{15}\sqrt{7}}{45}$	$1.0935 \cdot 10^0$
$\frac{5(5-\sqrt{15}+\sqrt{7})-\sqrt{15}\sqrt{7}}{90}$	$\frac{5(5+\sqrt{15}+\sqrt{7})+\sqrt{15}\sqrt{7}}{90}$	$\frac{4-\sqrt{7}}{9}$	$2.1014 \cdot 10^{-1}$

Tabelle 5.2:  $D_3$ -invariante Formel vom Grad 8

Falls  $p_1, p_2, p_3$  eine  $H$ -Basis bilden, gibt es also eine Syzygie vom Typ 2. Wegen  $\dim(\mathbb{P}_4 \cap V_2) = 1$  ergibt sich nach Berechnung von  $Q_1^2 \in \mathbb{P}_4 \cap V_2$  in REDUCE eine quadratische Gleichung für  $a$  mit den Lösungen

$$a_+ = \frac{19 + 11\sqrt{7}}{2673}, \quad a_- = \frac{19 - 11\sqrt{7}}{2673}$$

Für beide Parameterwerte haben, wie Rechnungen zeigen,  $p_1, p_2$  und  $p_3$  19 gemeinsame Nullstellen, bilden also mit Verallgemeinerung von Satz 1.12 eine  $H$ -Basis. Für  $a_-$  ergibt sich das Paar von Laurie [43].  $a_+$  führt auf die neue Formel aus Tabelle 5.2. Die beiden Formeln unterscheiden sich nur durch Vorzeichen.

Der Versuch, ein  $D_3$ -invariantes Paar vom Grad 7 und 9 mit 25 Knoten zu konstruieren, führte wegen komplexer Nullstellen nicht zum Erfolg.

Das letzte Beispiel zeigt noch einmal die Schlagkräftigkeit des in Kapitel 3 entwickelten Konstruktionsverfahrens.

**Beispiel 5.5 :** In diesem Beispiel wird eine  $D_3$ -invariante Sequenz konstruiert, die von dem Paar aus Beispiel 5.3 ausgeht. Gesucht ist also eine  $D_3$ -invariante Kubaturformel  $Q_2$  vom Grad 9, die die Knoten der  $D_3$ -invarianten Kubaturformel vom Grad 7 mit 16 Knoten auch als Knoten hat. Das zugehörige Ideal ist  $\mathcal{D} = (q_1, q_2)$ , wobei  $q_1, q_2 \in K_4^3$  die symmetriegerechte Basis eines zweidimensionalen,  $D_3$ -invarianten Raumes bilden (siehe Bild 5.3). Es ist möglich, einen Ansatz mit drei 9-orthogonalen Polynomen  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{D}$  vom Grad 6 zu machen:

$$p_1 := h_{61}^2 + b \cdot h_{51}^2$$

hat für  $b = \frac{280}{11583}$ , wobei

$$\begin{aligned} h_{51}^2 &:= P^{5,0} - P^{0,5} + P^{3,2} - P^{2,3} + \frac{5}{2}(P^{4,1} - P^{1,4}), \\ h_{61}^2 &:= P^{5,1} - P^{1,5} + \frac{5}{2}(P^{4,2} - P^{2,4}), \end{aligned}$$

die Knoten von  $Q_1$  als Nullstellen.  $h_{51}^2, h_{61}^2$  wurden mit der Projektion auf das Konglomerat  $V_2$  berechnet.

$\mathcal{D} \cap \mathbb{P}_6 \cap V_3$  hat die Dimension 8. Dabei gilt wegen Lemma 1.4

$$\mathcal{D} \cap \mathbb{P}_6 \subset K_6 + K_5 + K_4 + K_3 + K_2.$$

Wegen  $\dim(K_3^3 + K_2^3) = 4$  gibt es einen vierdimensionalen Teilraum  $\mathcal{D} \cap (K_6 + K_5 + K_4) \cap V_3$ . Man kann also  $p_1$  durch 9-orthogonale Polynome  $p_2, p_3 \in \mathcal{D} \cap V_3$  von Grad 6 in Abhängigkeit eines Parameters  $a \in \mathbb{R}$  ergänzen. Sei  $E := \text{span}(p_1, p_2, p_3)$  und  $M := \mathbb{P}_2$ . Nach der Charakterprodukttable 2.1 gilt

$$\chi^E \cdot \chi^M = (\psi_2 + \chi)(2\psi_1 + 2\chi) = 2\psi_1 + 4\psi_2 + 6\chi.$$

Für  $A = \mathbb{P}_1 \odot E$  gilt  $\chi^A = \psi_1 + 2\psi_2 + 3\chi$ . Wegen

$$\chi^E + \chi^{K_7} + \chi^{K_8} = 3\psi_1 + 3\psi_2 + 7\chi$$

und  $\chi^E \cdot \chi^M$  und

$$\chi^{K_8} = 2\psi_1 + \psi_2 + 3\chi$$

gilt  $\chi^B = \psi_1 + \psi_2 + 3\chi$  für ein  $D_3$ -invariantes, direktes Komplement  $B$  von  $A$  in  $\mathcal{A} \cap \mathbb{P}_8$ , falls  $p_1, p_2, p_3$  eine  $H$ -Basis von  $\mathcal{A} = (p_1, p_2, p_3)$  bilden. Nach Satz 3.19 gilt  $\chi^Y = \chi^E \chi^M - \chi^A - \chi^B = \psi_2$  für den Syzygienraum  $Y$ . Man berechnet

$$Q_1^2 \in (E \odot M) \cap \mathbb{P}_5 \cap V_2$$

durch systematische Gradreduktion. Es gilt zwar  $\dim \mathbb{P}_5 \cap V_2 = 2$ . Aber wegen  $\dim(\mathbb{P}_5 \cap V_2 \cap \mathcal{D}) = 1$  ergibt sich aus  $Q_1^2 = 0$  nur eine Gleichung für  $a$ . Die Lösung dieser linearen Gleichung ist

$$a = \frac{84}{605}.$$

Eine Rechnung ergibt, daß  $p_1, p_2, p_3$  für diesen Wert 28 reelle, verschiedene, gemeinsame Nullstellen haben, bilden also nach Verallgemeinerung von Satz 1.12 eine  $H$ -Basis. Die Gewichte werden durch ein lineares Gleichungssystem ermittelt. Die neue  $D_3$ -invariante Formel wird in Tabelle 5.3 angegeben.

$x$	$y$	$1 - x - y$	<i>Gewicht</i>
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-6.97562388006918 \cdot 10^0$
$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}$	$1.42504103834966 \cdot 10^{-2}$
$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}$	$-9.50110616108759 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{9}$	$1.22378153247155 \cdot 10^{-1}$
$\frac{4+\sqrt{15}}{9}$	$\frac{4-\sqrt{15}}{9}$	$\frac{1}{9}$	$8.15854354981127 \cdot 10^{-3}$
$\frac{2(5+\sqrt{15})}{55}$	$\frac{2(5+\sqrt{15})}{55}$	$\frac{35-4\sqrt{15}}{55}$	$2.37984719213637 \cdot 10^0$
$\frac{2(5-\sqrt{15})}{55}$	$\frac{2(5-\sqrt{15})}{55}$	$\frac{35+4\sqrt{15}}{55}$	$6.36757324486581 \cdot 10^{-3}$
$\frac{2(5+\sqrt{15})}{55}$	$\frac{2(5-\sqrt{15})}{55}$	$\frac{7}{11}$	$2.38626360941510 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 5.3:  $D_3$ -invariante Formel vom Grad 9 einer Sequenz

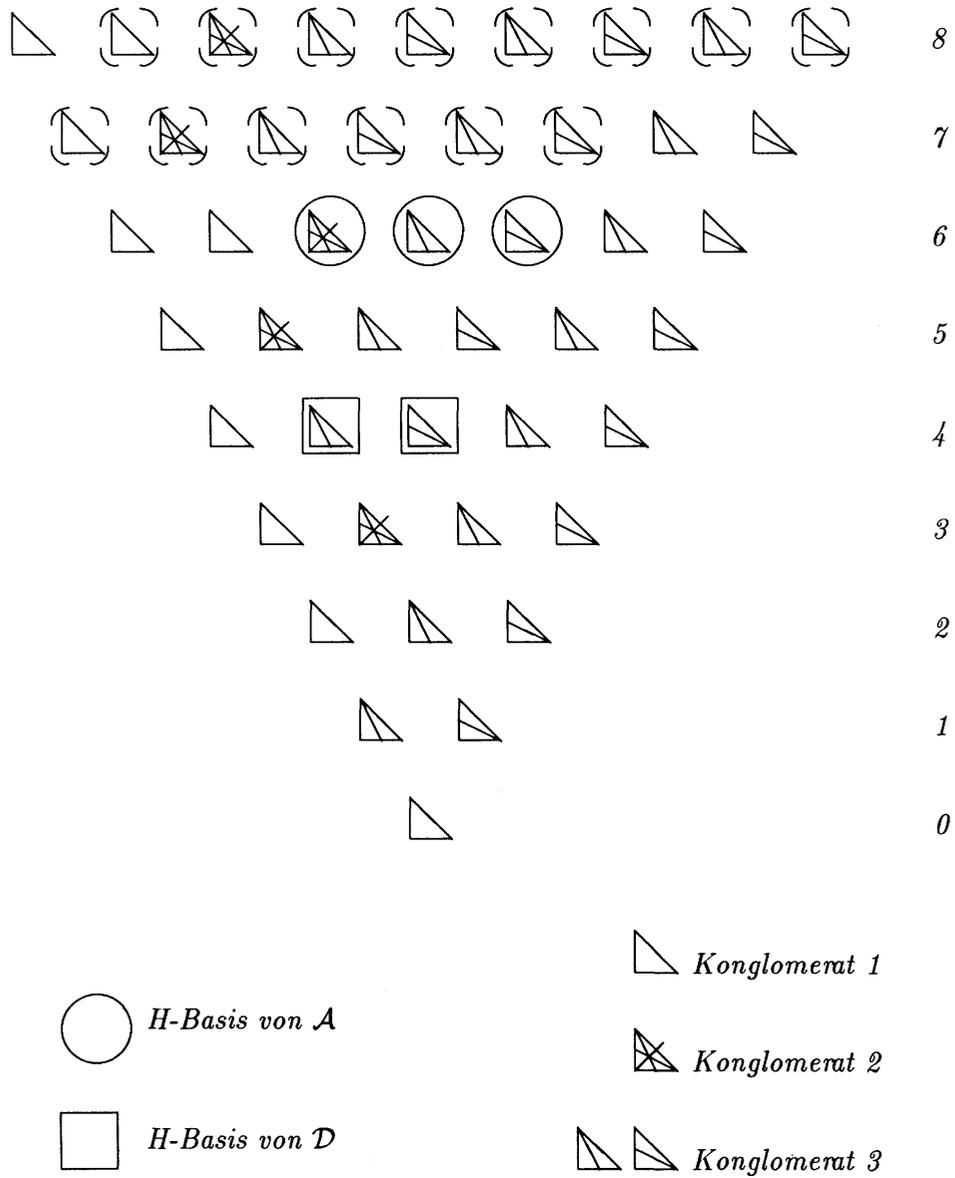


Abbildung 5.3:  $D_3$ -inv. Ideale zum Paar mit  $d_1 = 7, d_2 = 9, n_1 = 16, n_2 = 28$

# Literaturverzeichnis

- [1] M. Beckers, A. Haegemans: *The construction of three-dimensional invariant cubature formulae*. Report TW 85, Department of Computer Science, K.U. Leuven, 1986.
- [2] M. Beckers: persönlicher Briefwechsel, 1988.
- [3] J. Berntsen, T. O. Espelid: *On the construction of higher degree three-dimensional embedded integration rules*. SIAM J. Numer. Anal. 25, S. 222–234, 1988.
- [4] B. Buchberger: *Groebner-basis: an algorithmic method in polynomial ideal theory*. In: Multidimensional Systems Theory (ed.: N. K. Bose), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, S. 184–232, 1985.
- [5] W. Burnside: *An approximate quadrature formula*. Messenger of Math. 37, S. 166–167, 1908.
- [6] C. Chevalley: *Invariants of finite groups generated by reflections*. Amer. J. Math. 77, S. 778–782, 1955.
- [7] R. Cools, A. Haegemans: *Optimal addition of knots to cubature formulae for planar regions*. Numer. Math. 49, S. 269–274, 1986.
- [8] R. Cools, A. Haegemans: *Construction of fully symmetric cubature formulae of degree  $4k-3$  for fully symmetric planar regions*. J. Comput. Appl. Math. 17, S. 173–180, 1987.
- [9] R. Cools, A. Haegemans: *Automatic computation of knots and weights of cubature formulae for circular symmetric planar regions*. J. Comput. Appl. Math. 20, S. 153–158, 1987.
- [10] R. Cools, A. Haegemans: *Why do so many cubature formulae have so many positive weights ?* BIT 28, S. 792–802, 1988.

- [11] R. Cools, A. Haegemans: *Another step forward in searching for cubature formulae with a minimal number of knots for the square*. Computing 40, S. 139–146, 1988.
- [12] R. Cools, A. Haegemans: *Construction of minimal cubature formulae for the square and the triangle, using invariant theory*. Report TW 96, Department of Computer Science, K.U. Leuven, 1987.
- [13] R. Cools, A. Haegemans: *Construction of symmetric cubature formulae with the number of knots (almost) equal to Möller's lower bound*. In: Numerical Integration III (ed.: H. Braß, G. Hämmerlin) ISNM 85, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, S. 25–36, 1988.
- [14] R. Cools, A. Haegemans: *Construction of symmetric cubature formulae with the number of knots (almost) equal to Möller's lower bound*. Report TW 97, Department of Computer Science, K.U. Leuven, 1987.
- [15] R. Cools, A. Haegemans: *An embedded pair of cubature formulae of degree 5 and 7 for the triangle*. BIT 28, S. 357–359, 1988.
- [16] R. Cools, A. Haegemans: *A lower bound for the number of function evaluations in an error estimate for numerical integration*. Report TW 111, Department of Computer Science, K.U. Leuven, 1988.
- [17] R. Cools, A. Haegemans: *On the construction of multi-dimensional embedded cubature formulae*. Numer. Math. 55, S. 735–745, 1989.
- [18] R. Cools: *The construction of cubature formulae using invariant theory and ideal theory*. Thesis, Leuven, 1989.
- [19] M. Cristescu, G. Loubignac: *Gaussian quadrature formulas for functions with singularities in  $1/r$  over triangles and quadrangles*. In: Recent Advances in Boundary Element Methods (ed.: C. A. Brebbia), Pentech Press, Plymouth, S. 375–389, 1978.
- [20] P. J. Davis, P. Rabinowitz: *Methods of Numerical Integration*. Second Edition, Academic Press, Orlando u.a., 1984.
- [21] E. de Doncker, I. Robinson: *An algorithm for automatic integration over a triangle using nonlinear extrapolation*. TOMS 10 (1), S. 1–16, 1984.
- [22] E. de Doncker, I. Robinson: *Algorithm 612 TRIEX: integration over a triangle using nonlinear extrapolation*. TOMS 10 (1), S. 17–22, 1984.

- [23] P. van Dooren, L. de Ridder: *Algorithm 006. An adaptive algorithm for numerical integration over an  $n$ -dimensional cube.* J. Comput. Appl. Math. 2, S. 207–217, 1976.
- [24] H. Engels: *Numerical Quadrature and Cubature.* Academic Press, London u.a., 1980.
- [25] L. Flatto: *Invariants of finite reflection groups.* L'enseignement Math. 24, S. 237–292, 1978.
- [26] R. Franke: *Obtaining cubatures for rectangles and other planar regions by using orthogonal polynomials.* Math. Comput. 25, S. 803–818, 1971.
- [27] R. Franke: *Orthogonal polynomials and approximate multiple integration.* SIAM J. Numer. Anal. 8, S. 757–766, 1971.
- [28] R. Franke: *Minimal point cubatures of precision seven for symmetric planar regions.* SIAM J. Numer. Anal. 10, S. 849–862, 1973.
- [29] K. Gatermann: *The construction of symmetric cubature formulas for the square and the triangle.* Computing 40, S. 229–240, 1988.
- [30] R. Gebauer, H. M. Möller: *On an installation of Buchberger's algorithm.* J. Symb. Comp. 6, S. 275–286, 1988.
- [31] A. C. Genz, A. A. Malik: *Algorithm 019. Remarks on algorithm 006: An adaptive algorithm for numerical integration over an  $N$ -dimensional rectangular region.* J. Comput. Appl. Math. 6, S. 295–302, 1980.
- [32] J. M. Goethals, J. J. Seidel: *Cubature formulae, polytopes, and spherical designs.* In: *The Geometric Vein The Coxeter Festschrift* (ed.: Ch. Davis, B. Grünbaum, F. A. Sherk), Springer, New York u.a., S. 203–218, 1981.
- [33] A. Grundmann, H. M. Möller: *Invariant integration formulas for the  $n$ -simplex by combinatorial methods.* SIAM J. Numer. Anal. 15, S. 282–290, 1978.
- [34] A. Haegemans, R. Piessens: *Construction of cubature formulas of degree eleven for symmetric planar regions, using orthogonal polynomials.* Numer. Math. 25, S. 139–148, 1976.
- [35] A. Haegemans, R. Piessens: *Construction of cubature formulas of degree seven and nine for symmetric planar regions, using orthogonal polynomials.* SIAM J. Numer. Anal. 14, S. 492–508, 1977.

- [36] A. Haegemans: *Construction of known and new cubature formulas of degree five for three-dimensional symmetric regions, using orthogonal polynomials*. In: Numerical Integration (ed.: G. Hämmerlin) ISNM 57, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, S. 119–127, 1982.
- [37] A. Haegemans, R. Cools: *Construction of three-dimensional cubature formulae with points on regular and semiregular polytopes*. In: Numerical Integration Recent Developments, Software and Applications (ed.: P. Keast, G. Fairweather), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht u.a., S. 153–163, 1987.
- [38] A. C. Hearn: *REDUCE User's Manual, Version 3.3*. The Rand Corporation, Santa Monica, 1987.
- [39] D. Hilbert: *Über die Theorie der algebraischen Formen*. Math. Ann. 36, S. 473–534, 1890.
- [40] H. Hiller: *Geometry of Coxeter Groups*. Pitman, Boston u.a., 1982.
- [41] D. K. Kahaner, O. W. Rechar: *TWODQD an adaptive routine for two-dimensional integration*. J. Comput. Appl. Math. 17, S. 215–234, 1987.
- [42] P. Keast: *Moderate-degree tetrahedral quadrature formulas*. Comput. Meths. Appl. Mech. Engng. 55, S. 339–348, 1986.
- [43] D. P. Laurie: *Algorithm 584 CUBTRI: Automatic cubature over a triangle*. TOMS 8 (2), S. 210–218, 1982.
- [44] M. E. Laursen, M. Gellert: *Some criteria for numerically integrated matrices and quadrature formulas for triangles*. INT. J. Numer. Meth. Eng. 12, S. 67–76, 1978.
- [45] H. Melenk, H. M. Möller, W. Neun: *Symbolic solution of large stationary chemical kinetics problems*. Impact of Computing in Science and Engineering 1, S. 138–167, 1989.
- [46] H. M. Möller: *Polynomideale und Kubaturformeln*. Thesis, Dortmund, 1973.
- [47] H. M. Möller: *Kubaturformeln mit minimaler Knotenzahl*. Numer. Math. 25, S. 185–200, 1976.

- [48] H. M. Möller: *Lower bounds for the number of nodes in cubature formulae*. In: Numerische Integration (Hsg.: G. Hämmerlin) ISNM 45, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, S. 221–230, 1979.
- [49] H. M. Möller: *On the construction of cubature formulae with few nodes using Groebner bases*. In: Numerical Integration Recent Developments, Software and Applications (ed.: P. Keast, G. Fairweather), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht u.a., S. 177–192, 1987.
- [50] C. R. Morrow, T. N. L. Patterson: *Construction of algebraic cubature rules using polynomial ideal theory*. SIAM J. Numer. Anal. 15, S. 953–976, 1978.
- [51] G. Münzel, G. Renner: *Zur Charakterisierung und Berechnung von symmetrischen Kubaturformeln*. Computing 31, S. 211–230, 1983.
- [52] I. P. Mysovskikh: *On the construction of cubature formulas with fewest nodes*. Soviet. Math. Dokl. 9(1), S. 277–280, 1968.
- [53] I. P. Mysovskikh: *Cubature formulae and orthogonal polynomials*. USSR Comp. Math. 9(2), S. 217–228, 1969.
- [54] I. P. Mysovskikh: *The application of orthogonal polynomials to cubature formulae*. USSR Comp. Math. 12(2), S. 228–239, 1972.
- [55] I. P. Mysovskikh: *The approximation of multiple integrals by using interpolatory cubature formulae*. In: Quantitative Approximation, (ed.: R. A. DeVore, K. Scherer), Academic Press, New York u.a., S. 217–243, 1980.
- [56] E. Noether: *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen*. Math. Ann. 77, S. 89–92, 1916.
- [57] P. Rabinowitz, N. Richter: *Perfectly symmetric two-dimensional integration formulas with minimal numbers of points*. Math. Comp. 23, S. 765–779, 1969.
- [58] G. Rayna: *REDUCE Software for Algebraic Computation*. Springer, New York u.a., 1987.
- [59] H. J. Schmid: *On cubature formulae with a minimal number of knots*. Numer. Math. 31, S. 281–297, 1978.

- [60] H. J. Schmid: *Construction of cubature formulae using real ideals*. In: Multivariate Approximation Theory (ed.: W. Schempp, K. Zeller) ISNM 51, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, S. 359–377, 1979.
- [61] H. J. Schmid: *Interpolatorische Kubaturformeln und reelle Ideale*. Math. Z. 170, S. 267–282, 1980.
- [62] H. J. Schmid: *On the numerical solution of non-linear equations characterizing minimal cubature formulae*. Computing 24, S. 251–257, 1980.
- [63] H. J. Schmid: *Interpolatory cubature formulae and real ideals*. In: Quantitative Approximation (ed.: R. A. DeVore, K. Scherer), Academic Press, New York u.a., S. 245–254, 1980.
- [64] J.-P. Serre: *Linear Representations of Finite Groups* (Représentations linéaires des groupes finis, engl.), Translation from the French by L. L. Scott, Springer, New York u.a., 1977.
- [65] N. J. A. Sloane: *Error-correcting codes and invariant theory: new applications of a nineteenth-century technique*. Amer. Math. Monthly. 84, S. 82–107, 1977.
- [66] S. L. Sobolev: *Formulas of mechanical cubature on the surface of a sphere*. (in Russ.), Sibirsk Mat. Z. 3, S. 769–796, 1962.
- [67] E. Stiefel, A. Fässler: *Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung*. Teubner, Stuttgart, 1979.
- [68] A. H. Stroud: *A fifth degree integration formula for the  $n$ -simplex*. SIAM J. Numer. Anal. 6, S. 90–98, 1969.
- [69] A. H. Stroud: *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1971.
- [70] P. Verlinden, R. Cools, D. Roose, A. Haegemans: *The construction of cubature formulae for a family of integrals: a bifurcation problem*. Computing 40, S. 337–346, 1988.



- TR 86-1. H. J. Schuster. *Tätigkeitsbericht (vergriffen)*
- TR 87-1. Hubert Busch; Uwe Pöhle; Wolfgang Stech. *CRAY-Handbuch. - Einführung in die Benutzung der CRAY.*
- TR 87-2. Herbert Melenk; Winfried Neun. *Portable Standard LISP Implementation for CRAY X-MP Computers. Release of PSL 3.4 for COS.*
- TR 87-3. Herbert Melenk; Winfried Neun. *Portable Common LISP Subset Implementation for CRAY X-MP Computers.*
- TR 87-4. Herbert Melenk; Winfried Neun. *REDUCE Installation Guide for CRAY 1 / X-MP Systems Running COS Version 3.3*
- TR 87-5. Herbert Melenk; Winfried Neun. *REDUCE Users Guide for the CRAY 1 / X-MP Series Running COS. Version 3.3*
- TR 87-6. Rainer Buhtz; Jens Langendorf; Olaf Paetsch; Danuta Anna Buhtz. *ZUGRIFF - Eine vereinheitlichte Datenspezifikation für graphische Darstellungen und ihre graphische Aufbereitung.*
- TR 87-7. J. Langendorf; O. Paetsch. *GRAZIL (Graphical ZIB Language).*
- TR 88-1. Rainer Buhtz; Danuta Anna Buhtz. *TDLG 3.1 - Ein interaktives Programm zur Darstellung dreidimensionaler Modelle auf Rastergraphikgeräten.*
- TR 88-2. Herbert Melenk; Winfried Neun. *REDUCE User's Guide for the CRAY 1 / CRAY X-MP Series Running UNICOS. Version 3.3.*
- TR 88-3. Herbert Melenk; Winfried Neun. *REDUCE Installation Guide for CRAY 1 / CRAY X-MP Systems Running UNICOS. Version 3.3.*
- TR 88-4. Danuta Anna Buhtz; Jens Langendorf; Olaf Paetsch. *GRAZIL-3D. Ein graphisches Anwendungsprogramm zur Darstellung von Kurven- und Funktionsverläufen im räumlichen Koordinatensystem.*
- TR 88-5. Gerhard Maierhöfer; Georg Skorobohatyj. *Parallel-TRAPEX. Ein paralleler, adaptiver Algorithmus zur numerischen Integration ; seine Implementierung für SUPRENUM-artige Architekturen mit SUSI.*
- TR 89-1. *CRAY-HANDBUCH. Einführung in die Benutzung der CRAY X-MP unter UNICOS.*
- TR 89-2. Peter Deuffhard. *Numerik von Anfangswertmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen.*
- TR 89-3. Artur Rudolf Walter. *Ein Finite-Element-Verfahren zur numerischen Lösung von Erhaltungsgleichungen.*
- TR 89-4. Rainer Roitzsch. *KASKADE User's Manual.*
- TR 89-5. Rainer Roitzsch. *KASKADE Programmer's Manual.*
- TR 89-6. Herbert Melenk; Winfried Neun. *Implementation of Portable Standard LISP for the SPARC Processor.*
- TR 89-7. Folkmar A. Bornemann. *Adaptive multilevel discretization in time and space for parabolic partial differential equations.*
- TR 89-8. Gerhard Maierhöfer; Georg Skorobohatyj. *Implementierung des parallelen TRAPEX auf Transputern.*
- TR 90-1. Karin Gatermann. *Gruppentheoretische Konstruktion von symmetrischen Kubaturformeln.*



