

Vorwort

Am 18. Mai 1993 fand im festlichen Rahmen des Schloßtheaters von Sanssouci erstmalig die “Euler-Vorlesung in Sanssouci” statt. Sie soll von nun an jährlich stattfinden. Die Veranstaltung ist nach Leonhard Euler (1707-1783) benannt, einem der berühmtesten Mathematiker aller Zeiten. Euler war mit der Berliner Mathematik besonders verbunden, u. a. durch seine langjährige Tätigkeit als Direktor der Mathematischen Klasse der Berliner Akademie und am Hof Friedrichs des Großen in Potsdam. Im Rahmen der festlichen Veranstaltung hat Prof. R. Bölling einen Vortrag über Eulers Zeit in Berlin und Potsdam gehalten, der (auch im Blick auf die folgenden Euler-Vorlesungen) hiermit in gedruckter Form zugänglich gemacht wird.

*

Die unabhängige Auswahl-Jury, bestehend aus Prof. Hirzebruch (Präsident der European Mathematical Society (EMS), Universität Bonn und Max-Planck-Institut für Mathematik), Prof. Hoffmann (Mitglied des Wissenschaftsrates, TU München) und Prof. Grötschel (Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), Konrad-Zuse-Zentrum und TU Berlin), hatte für 1993 Professor Bott eingeladen, die “Euler-Vorlesung in Sanssouci” zu halten.

*

Professor **Raoul H. Bott** wurde 1923 in Budapest geboren. Nach seiner Promotion 1949 am ‘Carnegie Institute of Technology’ (Pittsburgh) war er am ‘Institute for Advanced Study’ (Princeton, NJ) und an der ‘University of Michigan’ (Ann Arbor) tätig. Im Jahr 1959 nahm er einen Ruf an die ‘Harvard University’ (Cambridge, MA) an, wo er seit 1977 einen besonders renommierten Lehrstuhl innehat, die “Caspar Graustein Professur” für Mathematik.

Das Werk von Professor Bott umfaßt eine Fülle von tiefliegenden Forschungen zur Geometrie, Topologie und Analysis. Sein berühmtester Beitrag ist der “Bottsche Periodizitätssatz”. Dieses Resultat war gleichzeitig ein

Höhepunkt der Homotopietheorie und Morse-Theorie, wie auch Ausgangspunkt für spektakuläre weitere Untersuchungen. Wichtige Theorien der modernen Mathematik (darunter die “ K -Theorie” und die “Indextheorie”) sind ohne Professor Botts Beiträge gar nicht denkbar.

Professor Bott hat für seine Verdienste zahlreiche Ehrungen erfahren, darunter Ehrendokortitel der ‘McGill University’, der ‘University of Notre Dame’ und der ‘Carnegie-Mellon University’, den ‘Veblen Prize’ (1974) und die ‘National Medal of Science’ der USA (1987). Er ist Mitglied der National Academy of Sciences (USA) und der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina (Halle, Sachsen-Anhalt).

Seinem Fachvortrag hat Professor Bott einige eindringliche Worte (aus eigenem Erleben!) über die Rolle Berlins in unserem Jahrhundert vorangestellt, die wir ebenfalls nicht in Vergessenheit geraten lassen wollen.

Die Euler-Vorlesung wird von den Mathematischen Instituten in Berlin und Potsdam gemeinsam getragen. Damit soll auch die außergewöhnliche Konzentration von mathematischen Instituten im Berliner Raum und die daraus entstehenden Chancen und Möglichkeiten gewürdigt werden. Gemeinsame Veranstalter sind:

- die mathematischen Fakultäten der
 - Freien Universität Berlin
 - Humboldt-Universität Berlin
 - Technischen Universität Berlin
 - Universität Potsdam
- das Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin
- das Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

*

Ich bin mir sicher, daß der vorliegende Report über den Tag hinaus von Bedeutung sein wird.

Berlin, 1. Oktober 1993

Leonhard Euler — aus der Zeit seines Wirkens in Berlin ¹

Reinhard Bölling

Meine sehr geehrten Damen und Herren!

Anläßlich der heutigen 1. Euler-Vorlesung in Sanssouci sollen einige Worte dem Gelehrten gewidmet sein, mit dessen Namen sich diese festliche Veranstaltung verbunden hat.

Kaum ein anderer Name der prominentesten Mathematiker aller Zeiten dürfte so häufig in den mathematischen Lehrbüchern unserer Tage zu finden sein, wie der Name Eulers.

Alles, was ich hier zu versuchen beabsichtige, ist, an einige bemerkenswerte Ereignisse aus den Berliner Jahren zu erinnern, ergänzt durch das eine oder andere Detail am Rande.

Euler verfaßte über 800 wissenschaftliche Abhandlungen, etwa 20 Monographien (darunter einige 2-3bändige Werke); seine Beiträge betreffen u. a. die Analysis, Algebra, Zahlentheorie, Mechanik, Geometrie (incl. Trigonometrie), Astronomie, Optik, Hydromechanik, Schiffswesen, Ballistik, Philosophie, Musiktheorie und Theologie. Was für eine Vielfalt!

Manches von dem, was Euler eingeführt oder als erster untersucht hat, verbinden wir gewöhnlich gar nicht mit seinem Namen. Auf der Einladungskarte, die Sie erhalten haben, finden sich mathematische Symbole, die uns allen höchst vertraut sind, mit denen wir geradezu täglich umgehen. Nicht jedem Mathematiker wird bekannt sein, daß sie alle von Euler mit der uns geläufigen Bedeutung eingeführt wurden:

1734 die Bezeichnungen $f(x)$ für Funktionen

1736 π für die Kreiszahl und e für die Basis der natürlichen Logarithmen

1748 treten Sinus und Cosinus in unserer heutigen Bedeutung auf (vor Euler hingen beide Funktionen noch vom Radius des zugrundegelegten Kreises ab)

¹Vortrag gehalten am 18. Mai 1993 anläßlich der 1. Euler-Vorlesung im Schloßtheater von Sanssouci

1755 das Summenzeichen $\sum$ und

1777 wird nicht nur Carl Friedrich Gauß geboren, auch i als Zeichen für die imaginäre Einheit erblickt das Licht der Welt und findet später vor allem durch Gauß allgemeine Verbreitung.

Euler war auch der erste, der die allgemeinen Formeln für die Fourier-Koeffizienten in der Theorie der trigonometrischen Reihen 30 Jahre vor Fourier fand. Die Art und Weise, wie die Logarithmen und einige Teile der Trigonometrie Eingang in den Schulstoff gefunden haben, geht ebenfalls auf ihn zurück.

Zunächst in aller Kürze die Eckdaten seines Lebens:

1707 Geburt in Basel als Sohn eines reformierten Pastors

1720 Aufnahme des Studiums an der Baseler Universität. Nach anfänglichem Studium der Theologie, orientalischer Sprachen und Geschichte, hört er Vorlesungen bei Johann Bernoulli, einem der bedeutendsten Mathematiker zu dieser Zeit, der die außergewöhnliche Begabung seines Schülers erkennt, ihn fördert, u. a. durch samstäglichen Privatunterricht.

1727 folgt Euler einem durch die Bernoullis vermittelten Ruf an die gerade 2 Jahre zuvor von Peter dem Großen gegründete Akademie der Wissenschaften in Petersburg.

1741 nimmt der 34jährige Euler den Ruf Friedrichs II an und siedelt mit seiner Familie nach Berlin über, wo er nach der Reorganisation der Akademie 1744 Direktor der Mathematischen Klasse wird.
25 Jahre bleibt Euler in Berlin. Den größten Teil der Zeit lebte er in einem Haus in der Behrenstraße unweit der Komischen Oper.

1766 folgt er dem Ruf der Kaiserin Katharina II und kehrt nach Petersburg zurück, wo er 1783 stirbt.

Allein schon im Blick auf seine Produktivität ist Euler eine Ausnahmeerscheinung; der Eindruck verstärkt sich noch, bedenkt man, daß er 1766 das Sehvermögen fast vollständig verlor, nachdem er bereits 1738 auf dem rechten Auge erblindet war. Seinen Anteil an dieser außerordentlichen Leistungsfähigkeit hatte sicherlich das phänomenale Gedächtnis, das er besaß.

Noch im hohen Alter soll er in der Lage gewesen sein, jeden beliebigen Gesang aus Vergils *Aeneis* wortgetreu rezitieren zu können. Sogar Protokolle von Akademiesitzungen kannte er noch nach Jahrzenten auswendig!

Bemerkenswert war außerdem Eulers Konzentrationsfähigkeit: “ein Kind auf den Knien, eine Katze auf dem Rücken, so schrieb er seine unsterblichen Werke” berichtet ein Mitglied der Berliner Akademie aus jenen Tagen.

Nach dem Urteil von Zeitgenossen war Euler bescheiden, von offenem, heiterem Gemüt, nie nachtragend, doch durchaus selbstbewußt und kritisch.

Friedrich II hatte im Sommer 1740 den Thron Preußens bestiegen. Zu seinen ergeizigen Plänen gehörte die Umwandlung der von Leibniz 1700 gegründeten *Societät der Wissenschaften*, die unter Friedrich Wilhelm I ein kümmerliches Dasein gefristet hatte, in eine Akademie nach Pariser Vorbild. Hierfür wollte er Euler, inzwischen ein Gelehrter von Weltruf, gewinnen. Durch den Tod der Zarin Anna Iwanowna, einer Nichte Peters I, und den danach einsetzenden Machtkämpfen, war eine instabile Lage entstanden, die Euler schließlich dazu veranlaßte, Friedrichs Ruf anzunehmen.

In den persönlichen Beziehungen bestand zwischen dem König und Euler von Beginn an eine Distanz. Zum einen waren Charakter und Weltanschauung zu verschieden. Euler blieb zeit seines Lebens tief im lutherischen Glauben verwurzelt (regelmäßig hielt er mit seiner großen Familie Hausandachten; insgesamt wurden 13 Kinder geboren, doch auch der Tod einiger blieb ihm nicht erspart). Friedrich, der sich der französischen Aufklärung verpflichtet fühlte, brachte Euler gegenüber nicht die Hochachtung entgegen, wie er sie etwa für d’Alembert oder Voltaire empfand.

Zum anderen ist es aber auch das Verhältnis Friedrichs zur Mathematik überhaupt, das die vorhandene Distanz mitbestimmt. Mit Befremden muß man in einigen Schriftstücken Friedrichs zur Kenntnis nehmen, mit welchem Unverstand er sich über die mathematische Wissenschaft ausläßt. Er begeht sogar die Geschmacklosigkeit, Eulers körperliches Gebrechen zu bewitzeln.

Das Spektrum der Aufträge, die Euler für den König zu erledigen hatte, war breit. Finanz- und Personalfragen der Akademie, Kalendervertrieb, Münzwesen gehörten ebenso dazu wie etwa die Beschäftigung mit Wind- und “Roß”mühlen, Gartenanlagen und insbesondere mit hydrotechnischen Problemen. So gab er Empfehlungen zur Nivellierung des Finowkanals zwischen Havel und Oder sowie zur Wasserversorgung der Residenz in Potsdam mit ihren zahlreichen, auf unterschiedlichen Ebenen sich befindenen Springbrunnen. An der von dem Mathematikprofessor Segner entwickelten hydrau-

lischen Maschine nahm er in den Jahren 1750-1753 wesentliche technische Änderungen vor und entwickelte die Grundlagen der Theorie der Wasserturbinen. Weitere mit der Lösung praktischer Aufgaben verbundene Tätigkeiten in den Berliner Jahren betrafen Berechnungen zur Organisation staatlicher Lotterien zur Aufführung der Staatskasse sowie Fragen der Versicherungsmathematik und Demographie. Jahrelang befaßte sich Euler mit Problemen der Optik, darunter mit der Möglichkeit der Herstellung achromatischer Linsen, berechnete ausführlich unterschiedliche dioptrische Systeme, die schließlich in der 3bändigen “Dioptrica” ihren Niederschlag fanden.

Ich möchte nun einige Bemerkungen zur Mathematik Eulers in den Berliner Jahren folgen lassen.

Er ist zum führenden Mathematikers seiner Zeit aufgestiegen. Zwischen 1743 und 1767 veröffentlichte er mehr als 250 größere und kleinere Arbeiten, die fast zu gleichen Teilen in den Berichten der Berliner und Petersburger Akademie abgedruckt wurden, die mehr angewandten Charakters im Blick auf Friedrich in Berlin, die mehr abstrakten Untersuchungen in Petersburg.

In den Anfang seiner Berliner Tätigkeit fällt die Entdeckung des grundlegenden zahlentheoretischen Satzes, den Gauß später als *theorema fundamentale* zu beweisen imstande ist. Es ist das quadratische Reziprozitätsgesetz, das Euler in einem Brief vom 28. August 1742 (in implizierter Form) Goldbach mitteilt.²

1748 erscheint die berühmt gewordene *Introductio in analysin infinitorum* (Einleitung in die Analysis des Unendlichen), sicherlich eines der einflußreichsten Bücher in der Geschichte der Analysis. Euler schreibt mit überlegener Klarheit in einer unkomplizierten Sprache, er versteckt nichts vor seinem Leser. Überhaupt können seine Bücher von einem heutigen Studenten nahezu mühelos gelesen werden (vom Lateinischen einmal abgesehen).

Ich erlaube mir, kurz zu darauf einzugehen, wie Euler die uns wohlbekannte seinen Namen tragende Gleichung

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$$

in der *Introductio* beweist.

Euler geht aus von Moivreschen Formeln

²A. P. Juškevič und E. Winter (Hrsg.): Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729-1764. Berlin: Akademie-Verlag 1965

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2}$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

die er zuvor de facto durch vollständige Induktion über die natürlichen Zahlen n bewiesen hat (explizit rechnet er die Spezialfälle $n = 2$ und $n = 3$ durch). Im §138 heißt es dann: es sei z ein *unendlich kleiner Bogen*, i eine *unendlich große Zahl* (vom lat. infinitus (unbegrenzt, unendlich)) derart, daß $iz = \nu$ einen *endlichen* Wert erhält.

Hieraus folgt $\sin z = \frac{\nu}{i}$, $\cos z = 1$. Durch Substitution ergibt sich aus den Moivreschen Formeln³

$$\cos \nu = \frac{(1 + \sqrt{-1} \frac{\nu}{i})^i + (1 - \sqrt{-1} \frac{\nu}{i})^i}{2}$$

$$\sin \nu = \frac{(1 + \sqrt{-1} \frac{\nu}{i})^i - (1 - \sqrt{-1} \frac{\nu}{i})^i}{2\sqrt{-1}}$$

In dem vorausgegangene Kapitel hatte Euler $(1 + \frac{z}{i})^i = e^z$ erhalten. Substitution in die vorstehende Formel liefert dann sofort

$$e^{\nu\sqrt{-1}} = \cos \nu + \sqrt{-1} \sin \nu.$$

In verbaler Formulierung tritt diese Aussage in einer 1717 publizierten Arbeit des jungen Roger Cotes (1682-1716) beiläufig auf. Sie wird dort weder bewiesen noch angewendet. In den Arbeiten, Briefen, Aufzeichnungen Eulers treten diese oder äquivalente Formeln in den Jahren 1739-1742 auf. Im Druck finden sich Sinus und Cosinus durch die Exponentialfunktion ausgedrückt in einer im September 1742 in der Berliner Akademie gelesenen, 1743 publizierten Abhandlung.

Erst Euler hat die nach ihm benannte Formel auf verschiedene Fragen der Analysis angewandt und erstmals einen Beweis gegeben. Für die Art des Umgangs mit unendlichen Reihen bzw. Produkten, wie sie Euler in der

³Euler gibt den Übergang von n zu i ohne weiteren Kommentar an.

“*Introductio* vorführt, wird das 19. Jahrhundert die Formulierung *Algebraische Analysis* prägen. Konvergenz- oder Stetigkeitsbetrachtungen im heutigen Sinne finden wir bei Euler nicht. Scheinbar unbekümmert, mit großer Geschicklichkeit und Eleganz präsentiert er seine Ergebnisse. Die logisch exakte Fundierung der Analysis vollzieht sich erst im 19. Jahrhundert in den Beiträgen von Cauchy, Bolzano, Weierstraß u. a. Auf die Gleichung $\log(-1) = \pi i$ war Euler schon früher (1728) im Verlauf seiner Korrespondenz mit Johann Bernoulli gestoßen, als beide Briefpartner die Funktion $y = (-1)^x$ diskutieren. Merkwürdigerweise scheint er dann die Angelegenheit einige Jahre nicht mehr beachtet zu haben. In einem Brief an Goldbach vom 4. Juli 1746 bemerkt Euler, er habe gefunden, daß der Ausdruck $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ einen reellen Wert habe, nämlich 0,2078795763 und dies erscheine ihm merkwürdig. Von hier aus dürfte er bald danach zur Einsicht über die Werte des Logarithmus von $\sqrt{-1}$ vorgedrungen sein.

Das früheste Zeugnis für den entschiedenen Durchbruch findet sich wohl in einem Brief Eulers an Gabriel Cramer vom 24. September 1746. Eulers Theorie der Logarithmen gipfelt schließlich 1749 in einer Abhandlung (übersetzt) *Über die Kontroverse zwischen den Herren Leibniz und Bernoulli über die Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen*, in welcher erstmals die unendliche Vieldeutigkeit des Logarithmus aus seiner direkten Bedeutung als Umkehrung des Exponentialfunktion gefunden wird.

1744 erscheint Eulers *Methodus inveniendi*, das gleichfalls berühmt gewordene Werk zur Variationsrechnung, nach Carathéodory eines der schönsten mathematischen Werke, die je geschrieben wurden. Die Variationsrechnung hat durch Euler ihren Namen und ihre erste systematische Behandlung erfahren. Für den tief religiösen Gelehrten war sie aber darüber hinaus mathematische Ausdrucksform des Schöpfungsgedanken Gottes: “*Da nämlich die Einrichtung der ganzen Welt die vorzüglichste ist und da sie von dem weisesten Schöpfer her stammt, wird nichts in der Welt angetroffen, woraus nicht irgendeine Maximum- oder Minimumeigenschaft hervorleuchte. Deshalb kann kein Zweifel bestehen, daß alle Wirkungen der Welt ebensowohl durch die Methode der Maxima oder Minima wie aus den wirkenden Ursachen selbst abgeleitet werden können.*”⁴

Mitte der 30er Jahre veruchte Euler die allgemeine Lösung einer alge-

⁴P. Funk: Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1970. (Zitat S. 29.)

braischen Gleichung von höherem als dem 4ten Grade durch Radikale darzustellen. (wie wir seit Abel und Galois wissen, notwendigerweise vergeblich). Wie alle seine Zeitgenossen war er von der Existenz einer solchen Auflösung überzeugt und schrieb die Erfolgslosigkeit der Bemühungen dem vermeintlich unzureichenden Stand der damaligen Algebra zu. Euler glaubte spätestens seit 1743, daß *alle* Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch komplexe Zahlen zu erhalten sind. Von ihm wird erstmals der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra formuliert: ein Polynom n -ten Grades ist als Produkt von n Linearfaktoren darstellbar. D'Alemberts (1748) und Eulers (1751) Beweisversuche bleiben lückenhaft. Erst ein halbes Jahrhundert später gelingt Gauß der erste vollständige Beweis.

Die sicher populärste elementargeometrische Entdeckung Eulers ist der nach ihm benannte Polyedersatz $e - k + f = 2$ für beliebige durch ebene Vielecke begrenzte konvexe Körper, wobei f die Anzahl der Flächen, k die Anzahl der Kanten und e die Anzahl der Ecken bezeichnen. Heutzutage würden wir das Ergebnis kurz so formulieren : ein konvexes Polyeder im dreidimensionalen euklidischen Raum hat stets die Charakteristik 2. Schon Descartes (1595-1650) scheint nach einer Notiz von Leibniz den Satz im wesentlichen gekannt zu haben. Euler hat ihn jedenfalls unabhängig gefunden und das ausgesprochen hübsche Resultat seinem Freund Goldbach in einem Brief vom 14. November 1750 mitgeteilt, dem dann am 26. November 1750 der Beweis folgte.

In die letzten Berliner Jahre (1761) fällt eine der mathematischen Hauptleistungen Eulers, die Entdeckung des Additionstheorems der elliptischen Integrale, das am Anfang einer Entwicklung steht, die schließlich in die Theorie der Abelschen Funktionen mündet, einem Forschungsschwerpunkt im 19. Jahrhundert.

Zum Abschluß soll noch einmal von Potsdam die Rede sein. Der vielbeschäftigte Euler hat auch Schach gespielt. Er schreibt am 4. Juli 1744 aus Berlin an Goldbach in Moskau: *“Allhier wird stark Schach gespielt: es befindet sich unter anderem ein Jud hier, welcher ungemein gut spielt, ich habe einige Zeit bei ihm Lektionen genommen und es jetzt so weit gebracht, daß ich ihm die meisten Partien abgewinne.”* Einige Jahre später heißt es in einem Brief Goldbachs vom 15. Juni 1751 an Euler: *“Ich habe schon längst in den Zeitungen gelesen, daß der Herr Philidor sich in Berlin bei den größten Schachspielern fürchterlich gemacht, woraus ich vermute, daß er Euer*

Hochedelgeboren auch nicht unbekannt sein wird.” In Eulers Antwort vom 3. Juli 1751 lesen wir: *“Den großen Schachspieler Philidor habe ich nicht gesehen, weil er sich mehrenteils in Potsdam aufhielt. Er soll noch ein sehr junger Mensch sein, führte aber eine Maitresse mit sich, wegen welcher er mit einigen Officiers in Potsdam Verdrüsslichkeiten bekommen, welche ihn genötiget, unvermutet wegzureisen, sonst würde ich wohl Gelegenheit gefunden haben, mit ihm zu spielen [...]”*.

Um mich nicht wegen Überschreitung meiner Redezeit der Gefahr auszusetzen, gleichfalls in ‘Verdrüsslichkeiten’ zu geraten, möchte ich hiermit meine Bemerkungen abschließen und mich für Ihre Aufmerksamkeit bedanken.

Euler Lecture at Sanssouci

Raoul Bott

Introductory Remarks.

Thank you for this very generous introduction.

I deem it a great honor to inaugurate these Euler lectures and am delighted to do so, quite especially in this magnificent setting.

The extent of Euler's genius is maybe best borne out by the relevance of his work to so much of the mathematics and physics of today. It is also a monument to the vast reach of our subject that his formulae concerning values of the zeta function $\zeta(s)$ at the negative integers are at the root of some of the most subtle contemporary invariants of "differentiability in the large".

This is my first visit to Berlin, a city that has been the focus of so much of the history of the twentieth century. At first the symbol of excellence in every sphere of cultural endeavor, it turned – for my generation – into a spectre of unimaginable terror and brutality, only to re-emerge during these last 45 years as a beacon of great courage, great hardship and dogged determination to keep freedom alive by peaceful means.

Walking the beautiful streets and sharing the friendly good humor of the Berliners throughout our sightseeing adventures of the last two days, it is difficult to believe in all the surges of insanity which this city has had to endure, and there must be a great temptation to simply bury the past. But I hope and pray that you will not succumb to it altogether. Rather, let Berlin be a monument not only to the glories of German culture but also a memorial to the terrible price exacted by all forms of fanaticism.

But it is time to turn from the *a priori* inanities of the political animal called man to that wonderful world of Mathematics, where we all, in one way or another, come face to face with some aspects of paradise.

And indeed we come face to face not only with that surely indispensable one – of consistency – but quite miraculously also with that other mysterious and even more wonderful attribute of Paradise: the overwhelming sense of the "interwovenness of all things".

It is an excursion into this aspect of topology that I have planned for us today, and to show that I practice what I preach, let me start by remembering the past and in particular what I first learned in 1949 when I came to Princeton. By the way, three of the dominant figures at the Institute for Advanced Study at that time, Einstein, Hermann Weyl, and von Neumann, all had previously served at the Humboldt University in Berlin! And so, for that matter, did that frequent and inspiring visitor there, Heinz Hopf.