Konrad-Zuse-Zentrum
für Informationstechnik Berlin

Takustraße 7
D-14195 Berlin-Dahlem
Germany

BRIGITTE LUTZ-WESTPHAL[1]

Unterrichtsideen zu Algorithmen der kombinatorischen Optimierung

[1]Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB), Takustraße 7, D-14195 Berlin, lutz-westphal@zib.de. *Arbeitsplatzadresse:* Technische Universität Berlin, Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften, Institut für Mathematik, Sekr. MA 6-2, Straße des 17. Juni 136, D-10623 Berlin, westphal@math.tu-berlin.de.

ZIB-Report 04-34 (August 2004)

Unterrichtsideen zu Algorithmen der kombinatorischen Optimierung

Brigitte Lutz-Westphal, Konrad-Zuse-Zentrum Berlin/TU Berlin[2]

Zusammenfassung

Im Rahmen von Problemstellungen der kombinatorischen Optimierung können Schülerinnen und Schüler lernen, Algorithmen selber zu entwickeln. Gleichzeitig lernen sie dabei moderne Mathematik in ihren Anwendungen kennen und erleben die Mathematik als lebendige Wissenschaft.

1 Das Projekt „Diskrete Mathematik für die Schule"

Wenn das Handy klingelt, die Müllabfuhr kommt, der Travelpilot richtig arbeitet oder Daten durch das WWW flitzen, steckt dahinter immer auch Mathematik. Neben den Ingenieurswissenschaften und der Informatik sorgt die kombinatorische Optimierung dafür, dass dies alles reibungslos und effizient funktioniert. Das von der Volkswagenstiftung geförderte Projekt „Diskrete Mathematik für die Schule" unter der Leitung von Prof. Dr. Martin Grötschel (TU Berlin/Konrad-Zuse-Zentrum Berlin) hat sich zur Aufgabe gemacht, Themen der kombinatorischen Optimierung für den Schulunterricht zugänglich zu machen.

In diesem Projekt werden u.a. Unterrichtsmaterialien zu folgenden Themen erarbeitet: Algorithmen für kürzeste Wege (z.B. Reiseplanung, Routenplaner im Internet, Wege von Datenpaketen im Internet...), Euler-Touren und das chinesische Postbotenproblem (z.B. Optimierung von Touren der Müllabfuhr oder von Briefzustellern o.ä.), das Problem des Handelsreisenden (z.B. Leiterplattenherstellung) Färbeprobleme (z.B. Frequenzzuweisung in Mobilfunknetzen), Minimale aufspannende Bäume (z.B. Planung von Telefonnetzen, Chipdesign). Obwohl die kombinatorische Optimierung ein noch sehr junges mathematisches Teilgebiet ist, sind diese Aufgabenfelder bereits zu „Klassikern" geworden. Moderne Mathematik, verbunden mit ihren alltagsnahen Anwendungen, bietet hier die Möglichkeit, einen lebendigen, motivierenden und anregenden Unterricht zu gestalten, der erleben lässt, was Mathematik ist und kann. Mit diesen Unterrichtsmaterialien wollen wir einen konkret umsetzbaren Beitrag zur Modernisierung und Verbesserung des Mathematikunterrichtes leisten.

2 Ein Themenbeispiel: Telefonnetze planen

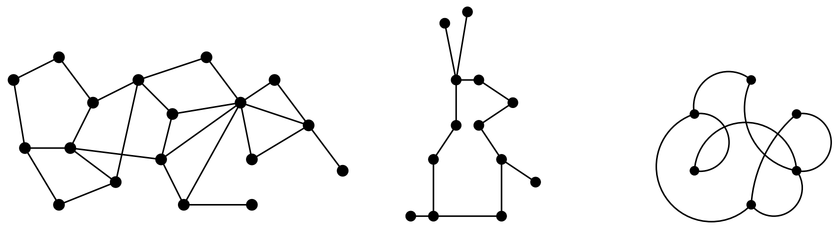
Es folgt ein Optimierungsbeispiel, das in der 8. Klasse behandelt wurde. Um ein Gefühl für die Sache zu bekommen, versuchen Sie bitte, sich die jeweiligen Antworten und

[2] gefördert von der Volkswagenstiftung

Lösungen erst selbst zu überlegen, bevor Sie weiterlesen. Viele Dinge können hier nur angedeutet werden, wir hoffen aber, dass die Skizzen Ihnen eine Vorstellung davon geben, wie in der kombinatorischen Optimierung gearbeitet wird.

An dieser Stelle vorneweg die wichtigsten Grundbegriffe (im Unterricht sollten diese Begriffe erst dann vorkommen, wenn die Schülerinnen und Schüler sich schon ausgiebig mit der Thematik befasst haben und man die Notwendigkeit sieht, sich auf einheitliche Begriffe zu einigen): Ein Graph ist ein Gebilde aus Knoten und Kanten. Eine Kante verbindet je zwei Knoten oder einen Knoten mit sich selber (Schlinge). Die Anzahl der Kanten, die in einem Knoten zusammentreffen, nennt man den Grad des Knotens.

Beispiele für Graphen:



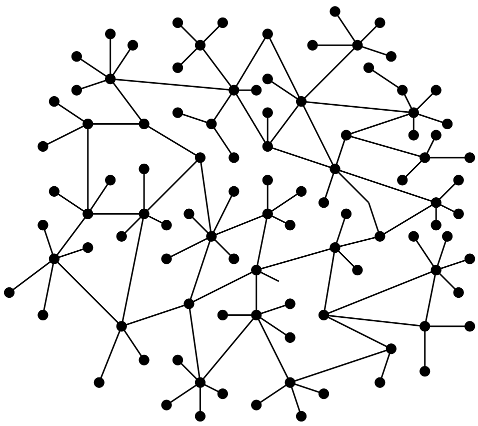
Stellen Sie sich nun vor, Sie wollten eine Telefongesellschaft betreiben. Neben vielen anderen Aufgaben müssen Sie sich um ein Leitungsnetz kümmern. Das existierende Kabelnetz ist bereits sehr dicht und die Betreiber sind bereit, Teile davon Kunden zur Verfügung zu stellen. Sie als Telefonanbieter brauchen also keine neuen Leitungen zu verlegen, sondern können bereits vorhandene mieten. Welche Anforderungen stellen Sie an dieses zu mietende Netz? [3]

1) Es soll alle Orte erreichen. Dabei stellt sich gleich die Frage, wie fein man diese Fragestellung modelliert und auf welchem Beispiel. Will man alle Haushalte erreichen oder alle Städte? Alle Stadtteile? oder noch etwas anderes? Hier befindet man sich schon mitten in der Problemstellung des Modellierens. Meist wird man von vorhandenem Daten- oder Kartenmaterial ausgehen, das eine bestimmte Modellierung suggeriert, aber die verschiedenen Möglichkeiten sollten dennoch thematisiert werden. Der Mobilfunk nutzt für die Verbindungen zwischen den Städten das Festnetz, so dass die Betrachtung des Netzes, das die wichtigsten Städte verbindet (s.u.), einen realistischen Hintergrund hat.

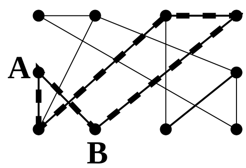
Solche Leitungsnetze lassen sich ganz natürlich als Graph interpretieren. Nun kann man das erste Kriterium für das gesuchte Netz unabhängig von der jeweiligen Modellierung so formulieren: Es müssen alle Knoten erreicht werden.

[3] vgl. Gritzmann S. 126

Ein Beispiel für ein Telefonnetz:[4]



2) Es sollen aber nicht nur alle Orte erreicht werden, sondern auch überflüssige Leitungen vermieden werden. Was ist „überflüssig“? Zunächst einmal doppelte oder mehrfache Verbindungen zweier Orte. Dabei sind nicht nur parallel verlaufende Leitungen gemeint, sondern ganz allgemein, dass es zwei oder mehr verschiedene Wege zwischen zwei Orten gibt, etwa so:



Solche ringförmigen Verbindungen nennt man „Kreise“, wie auch von Schülerseite vorgeschlagen wurde.[5] Das gesuchte Netz darf also keine Kreise enthalten.

Wenn wir ein kreisfreies Netz mieten, was passiert dann aber, wenn eine Leitung beschädigt wird? Wie müsste ein Netz aussehen, das Ausfallsicherheit gewährleistet? Was heißt eigentlich Ausfallsicherheit im graphentheoretischen Sinne? Hier ist ein kleiner graphentheoretischer Exkurs zu Zusammenhang, zweifachem Zusammenhang etc. möglich, wenn genügend Zeit vorhanden ist. In der Praxis wird die Ausfallsicherheit vom ursprünglichen Netzbetreiber gewährleistet, d.h. im Notfall werden Ersatzleitungen zur Verfügung gestellt, so dass dies bei unseren weiteren Überlegungen nicht berücksichtigt werden muss.

3) Das Netz muss zusammenhängend sein, d.h. von jedem Ort aus muss man mit jedem anderen telefonieren können.

[4] Ein sehr schönes Bild gibt es bei Gritzmann, S.126

[5] Der Begriff Kreis stammt aus der graphentheoretischen Terminologie und machte den Schülerinnen und Schülern keinerlei Probleme, manch ein Lehrer störte sich allerdings an solch unrunden Kreisen.

Das, was bis jetzt definiert wurde, ist ein aufspannender Baum in einem Graphen. Also müssen wir nun weiterfragen: Wie findet man aufspannenden Bäume? Jüngere Schülerinnen und Schüler haben vor allem Freude daran, solche aufspannenden Bäume in Graphen einzuzeichnen.

Dabei stellen sich bereits weitere Fragen, z.B. wie viele Kanten man einfärben muss, wenn der Graph n Knoten hat. Dass es n-1 Kanten sein müssen, lässt sich auf experimentellem Wege schnell vermuten: Man zeichnet sich eine Anzahl von beliebigen Graphen auf und sucht darin aufspannende Bäume. In einer Hinsicht muss hier aufgepasst werden: Diese Vermutung bezieht sich auf zusammenhängende Graphen (Man kann hier auch gleich weiter überlegen: Wie lautet die Beziehung bei allgemeinen Graphen mit k Komponenten?). Intuitiv gehen die Schülerinnen und Schüler meist sowieso von zusammenhängenden Graphen aus, insbesondere wenn man vorher mit Telefonnetzen gearbeitet hat. Schaut man sich im Gegensatz dazu das deutsche Straßennetz an, so ist dieser Graph nicht zusammenhängend, da zu den wenigsten Inseln eine Straßenverbindung existiert.

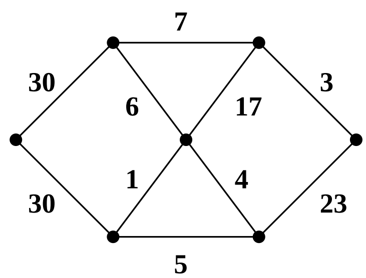
Der Beweis für diesen Satz benötigt eigentlich die vollständige Induktion. Man kann aber auch konstruktiv argumentieren, indem man von einem Graphen mit einem Knoten ausgeht (der übrigens beliebig viele (Schlingen-)Kanten haben kann), dessen aufspannender Baum 0 Kanten hat. Nun vergrößert man den Graphen um einen Knoten und beliebig viele Kanten. Der neue Knoten muss durch eine Kante an den bereits vorhandenen aufspannenden Baum angebunden werden usw.

Eine weitere Frage zum Weiterforschen ist, wie viele verschiedene aufspannende Bäume es für einen speziellen Graphen geben kann. Dass es nicht nur einen gibt, sehen die Schülerinnen und Schüler schnell. Für vollständige Graphen (d.h., dass jeder Knoten mit jedem verbunden ist) auf n Knoten gibt es n^{n-2} (!) verschiedene aufspannende Bäume, wenn man den Knoten Namen („Labels“) gibt (Ohne Knotenbenennung wären es aus Symmetriegründen weniger verschiedene Bäume). Für diesen Satz gibt es einen sehr schönen Beweis, der allerdings für die Mittelstufe etwas aufwändig, aber dennoch einen Versuch wert ist. Jeden dieser Bäume kann man mittels eines leicht zu ermittelnden $n-2$-Tupels eindeutig charakterisieren. Da man den Baum auch wieder eindeutig aus dieser Zahlenfolge rekonstruieren kann, ist eine bijektive Beziehung zwischen der Menge der aufspannenden Bäume und der Menge der $n-2$-Tupel mit Einträgen aus der Menge $\{1, ..., n\}$ hergestellt.

Wenn man sich nun überlegt, dass diese aufspannenden Bäume auch in sehr großen Leitungsnetzen (oder Graphen) konstruiert werden müssen, dann liegt der Computereinsatz auf der Hand. An dieser Stelle kann man mit dem weit verbreiteten Glauben, dass Computer alles einfach so können, aufräumen. Ein vergleichsweise hartes Stück Arbeit ist nämlich, jetzt ein allgemeingültiges Verfahren zu entwickeln, das auf beliebigen zusammenhängenden Graphen aufspannende Bäume konstruiert. Folgende Überlegungen müssen u.a. angestellt werden: Wie kommt der Graph in den Computer? In welchem Knoten fange ich an? Wie erkenne und vermeide ich Kreise? Was passiert, wenn man in einer „Sackgasse“ (Knoten mit Grad 1) gelandet ist?

Der erste Punkt soll hier nicht weiter ausgeführt werden. Man kann im Rahmen dieser Fragestellung Graphenisomorphie behandeln, was für alle Klassenstufen ein reizvolles Thema ist.[6] Die weiteren Punkte zeigen, wie nun ein ganz präzises Analysieren des Vorgehens gefordert wird, um einen Algorithmus zu entwickeln.[7] Es müssen klare kleinschrittige Anweisungen formuliert werden und alle möglichen Sonderfälle wie z.B. „Sackgassen“ bedacht werden. Einen korrekten Algorithmus zu formulieren bereitet auch erfahrenen Mathematikerinnen und Mathematikern immer wieder Probleme. Versuchen Sie es selbst einmal! [8]

Noch nicht zur Sprache kam, dass ja auch Kosten minimiert werden sollen, also ein minimaler aufspannender Baum gesucht wird. Wie lang eine (gezeichnete) Kante eines Graphen ist, macht keine Aussage über deren Kosten (oder km-Länge o.ä.). Das kann man sich ganz einfach anhand des Telefonbeispiels klarmachen: muss für das Verlegen und Warten einer Leitung viel gegraben werden, so ist dieser Abschnitt teurer als ein Leitungsabschnitt, der in ein vorhandenes Rohr geschoben oder in einem Fluss versenkt werden kann. Die Kosten werden als sogenannte Kantengewichte an die Kanten geschrieben.



Wie findet man einen aufspannenden Baum mit minimalen Kosten? Das Schöne ist, dass hier ein ganz einfacher Algorithmus, der Greedy-Algorithmus, funktioniert. „Greedy“ bedeutet gierig. Gemeint ist, dass jeweils das lokal optimale gemacht wird und man so zum globalen Optimum kommt. Hier heißt das, dass stets die jeweils billigste noch nicht verwendete Kante gewählt wird, unter der Voraussetzung, dass sie keinen Kreis schließt (Algorithmus von Kruskal). Oder man lässt von einem Knoten ausgehend einen Baum wachsen, wobei die Wahl der jeweils nächsten Kante auch nach dem Greedy-Prinzip funktioniert (Algorithmus von Prim). Auf diese Verfahren kommen Schülerinnen und Schüler sehr schnell selbst. Es ist das, was man „aus dem Bauch heraus“ tun würde.

[6] siehe `http://www.math.tu-berlin.de/~westphal/projekt/`

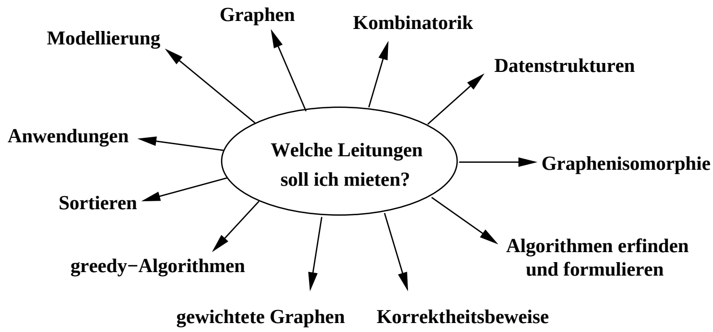
[7] Für den Mathematikunterricht bleibt man am Besten auf der Ebene des umgangssprachlich Formulierten. Es geht hier ja um den Algorithmus an sich und nicht um die Implementierung

[8] Lösungen zu dieser Fragestellung finden Sie unter „Breitensuche“ oder „Breadth-First-Search“ und Tiefensuche“ oder „Depth-First-Search“ in der einschlägigen Literatur.

Oft aber trauen sie sich nicht, so etwas „Einfaches" vorzuschlagen, weil es im Mathematikunterricht viel zu selten vorkommt, dass man seiner Intuition folgen darf. Dass man mit diesen Verfahren tatsächlich immer einen minimalen aufspannenden Baum erhält, muss bewiesen werden. Dazu siehe weiter unten.

Man sollte aber unbedingt auch zeigen, dass das Greedy-Verfahren nicht bei allen kombinatorischen Optimierungsproblemen zu einer Optimallösung führt. Am schönsten geht das beim Problem des Handelsreisenden, das beispielsweise bei der Herstellung von Leiterplatten für elektronische Geräte eine große Rolle spielt.[9] Hier haben wir eine strukturell komplett anders geartete Fragestellung, für die es vermutlich keine effizienten Lösungsstrategien geben kann[10]. Effizient bedeutet, dass ein Verfahren in „absehbarer Zeit" eine Lösung findet. Die Berechnung aller möglichen Rundreisen (Enumeration), findet rein theoretisch die Optimallösung, kann aber nicht effizient implementiert werden. Dass bei n Knoten die Anzahl der verschiedenen Rundreisen $(n-1)!/2$ ist, kann man die Schülerinnen und Schüler selber finden und beweisen lassen. Die Enumeration aller möglichen Rundreisen durch nur 20 Städte dauert etwa 2 Jahre und braucht bei nur wenig größeren Beispielen mehr Zeit, als das Universum alt ist. Dennoch gibt es Lösungsstrategien, sogenannte Heuristiken, die sehr gute, manchmal auch optimale Lösungen liefern. Zudem kann man untere Schranken berechnen. Dieser ganze Themenkomplex ist auch sehr lohnend für die Schule, kann hier aber nicht weiter ausgeführt werden.

Hier endet der kurze Ausflug in die kombinatorische Optimierung. Er sollte auch deutlich machen, wie viel inhaltliche Flexibilität in dem Stoff steckt. Der Unterrichtsablauf kann sich ganz nach den Schülerfragen richten, die im Laufe der Erarbeitung entstehen und muss nur an wenigen Stellen gelenkt werden, je nach dem welche Ziele man verfolgt oder welches Endprodukt man erreichen möchte. Das ist deshalb möglich, weil der Stoff nicht hierarchisch gegliedert ist, sondern eher aus einer Anfangsfrage heraus in viele verschiedene voneinander unabhängige Richtungen wachsen kann. Das eröffnet wunderbare Freiräume für einen schülerorientierten Unterricht.



[9] Für weitere Informationen über dieses berühmteste Problem der kombinatorischen Optimierung, siehe z.B. `http://www.math.princeton.edu/tsp/`

[10] Dieses offene Problem der Komplexitätstheorie wurde als eines der Milleniumsprobleme des Clay-Institute gewählt. Preisgeld: 1 000 000 Dollar! `http://www.claymath.org/Millennium_Prize_Problems/P_vs_NP/`

3 Warum gerade kombinatorische Optimierung?

Warum neue Themen für den Mathematikunterricht, wo doch allerorten die Curricula verschlankt werden und die Hauptfrage lautet, welche der traditionellen Inhalte weggelassen werden können oder sollen?

Spätestens seit der PISA-Studie wird vom Mathematikunterricht verstärkt gefordert, dass er Problemlösefähigkeit fördert, mathematisches Modellieren übt, Bezüge zum Alltag der Schülerinnen und Schüler sowie zur aktuellen Forschung und zu Anwendungen aufweist und noch einiges mehr. Die ausgewählten Themen bieten besonders gut die Möglichkeit, einen derart orientierten Unterricht zu gestalten. Die Problemstellungen stammen häufig aus alltagsnahen Gebieten und sind meist spontan verständlich und einleuchtend. Die klassische skeptische Schülerfrage "Wozu braucht man das überhaupt?" beantwortet sich hier von selbst. Es handelt sich um echte Anwendungen, und vor allem auch um „echte" mathematische Lösungen dafür, also Mathematik in der Form, wie sie tatsächlich in der Praxis eingesetzt wird. Diese ideale Kombination aus für Schülerinnen und Schüler verständlicher und erlebbarer Mathematik und alltagsnahen Anwendungen findet sich in kaum einer anderen mathematischen Fachrichtung.

Zudem unterscheiden sich die Denkweisen und Methoden der diskreten Mathematik erheblich von denen der traditionellen Schulmathematik. „Mathematik ohne Rechnen" sei das, was wir im Unterricht getan haben, befand ein Schüler. Tatsächlich gab es (fast) nichts zu berechnen, außer ein paar Additionen, dafür haben wir umso mehr argumentiert, experimentiert, skizziert, modelliert und Texte geschrieben. Hier eröffnen sich insbesondere Chancen für solche Schülerinnen und Schüler, die mit der stark kalkülorientierten traditionellen Schulmathematik Schwierigkeiten haben.

Die Themen haben alle einen algorithmischen Anteil. Durch das Erfinden und (umgangssprachlich) präzise Formulieren von Algorithmen werden auch sprachliche Fähigkeiten gefördert, sowie die Analyse von Situationen und Handlungen im Allgemeinen geübt. Algorithmen werden nicht mehr nur als stupide zu befolgende „Rechenvorschriften"erlebt, sondern als etwas, das es erst zu (er)finden gilt, als sinnvolles Werkzeug zur Lösung von Problemen. Die dabei benötigte saubere mathematische Modellierung der Probleme schult den Blick für das Wesentliche

Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass die Schülerinnen und Schüler im Rahmen der Graphentheorie lernen können, selber zu experimentieren. Beispielgraphen zur Entwicklung oder Überprüfung von Vermutungen und Sätzen oder zur Erprobung von Algorithmen können von den Schülerinnen und Schülern beliebig selber ausgedacht werden. Ungünstige oder gar unbrauchbare Beispiele kann es dabei nicht geben. Dies ist eine wichtige (und viel zu selten gemachte) Erfahrung im Mathematikunterricht und kann eine Ahnung davon vermitteln, wie in der mathematischen Forschung gearbeitet wird, nämlich oft spielerisch!

Nicht zuletzt können moderne Themen helfen, ein realistischeres Bild der Mathematik zu vermitteln als das bisher geschieht. Dass es in der Mathematik noch offene Fragen gibt, versetzt Schülerinnen und Schüler fast immer in ungläubiges Erstaunen. Die kombinatorische Optimierung kann als bereits klassisches, aber dennoch längst nicht vollständig erforschtes Gebiet, dazu beitragen, ein lebendiges Bild des Faches zu vermitteln. Viele der noch offenen Fragen sind ohne großen Aufwand erschließbar und dadurch wesentlich besser zugänglich als offene Fragen aus anderen Fachgebieten.

4 Unterrichtsmaterialien

Zu den von uns ausgewählten Themen existieren bisher praktisch keine Unterrichtsmaterialien bis auf einige wenige Vorschläge für kleine Teilgebiete.[11] Das einzige sehr bekannte Beispiel ist das Königsberger Brückenproblem, das inzwischen ein Klassiker für Vertretungsstunden geworden ist. Im deutschsprachigen Raum liegt dieser Mangel an Materialien daran, dass die kombinatorische Optimierung (noch) nicht in den Lehrplänen steht.[12]

In den USA gibt es Materialien zur Diskreten Mathematik, die allerdings eher auf Fragestellungen der Kombinatorik oder Graphentheorie fokussieren und den angewandten Aspekt der Optimierung kaum berücksichtigen. [13] Generell entsprechen die wenigen uns zugänglichen Materialien nicht unseren Vorstellungen von Inhalt und Methodik.

Wichtigstes Ziel unserer in der Entwicklung befindlichen Unterrichtsmaterialien ist, problemorientiertes selbständiges Arbeiten zu fördern. Um eine weitgehende Einsetzbarkeit zu erreichen, wird ein methodischer Mittelweg gegangen. Ein reiner Projektunterricht böte sich an[14] , ist allerdings im normalen Schulalltag oft nicht praktikabel. Darum schlägt das Material an jeder möglichen Stelle das selbständige Arbeiten vor, orientiert sich aber doch eher an den Gegebenheiten normalen Mathematikunterrichts.

5 Erfahrungen aus den Unterrichtsversuchen

Folgende Themen wurden im Schuljahr 2002/2003 bereits erfolgreich im Unterricht erprobt:

[11] z.B. Green, Nigel: Unterrichtsvorschläge zur diskreten Mathematik, in: mathematik lehren, Heft 84, 1997

[12] Da der Pflichtkanon stark gekürzt wird, bleibt dort kein Platz für Neues. Evtl. werden diese Themen jedoch in Wahlbereiche aufgenommen. Die zukünftigen Bildungsstandards lassen voraussichtlich etwas Raum dafür.

[13] z.B. Chavey, Darrah: Drawing Pictures with one Line. Exploring Graph Theory, HistoMap Module 21, COMAP, Lexington 1992; oder: Kenny, Margaret J. und Hirsch, Christian R.: Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12, National Council of Teachers of Mathematics, Virginia, USA, Yearbook 1991

[14] und wurde von A.Schuster, Würzburg, zum Traveling-Salesman-Problem und zu Kürzesten Wegen bereits erprobt, vgl. Schuster, Andreas: Kombinatorische Optimierung als Gegenstand der Gymnasialdidaktik, Habilitationsschrift, Würzburg, in Vorbereitung

- *Minimale aufspannende Bäume* in Klasse 8 (Wildermuth-Gymnasium Tübingen),
- *Das chinesische Postbotenproblem* in Klasse 9 (Geschwister-Scholl-Schule Tübingen),
- *Kürzeste Wege und das Traveling-Salesman-Problem* in Klasse 11 (profilierter Profilkurs Herder-Oberschule Berlin- Charlottenburg),
- *Das Traveling-Salesman-Problem* in Klasse 11 (Profilkurs Romain-Rolland- Gymnasium Berlin-Reinickendorf).

Die Motivation, sich mit den Themen zu beschäftigen, war bei allen vier Schülergruppen sehr groß. Der problemorientierte Ansatz und die Nähe zu Alltag und Anwendung wirkten sich sehr positiv auf die Arbeitsbereitschaft aus. Auch das Bewusstsein, an der aktuellen Forschung teilhaben zu dürfen, war förderlich für den Unterricht. Insbesondere waren die Gruppen alle mit sehr viel Spaß bei der Sache, vor allem wenn es darum ging, in Kleingruppen spielerisch zu forschen. Bereits nach wenigen Stunden wurde kompetent „gefachsimpelt", obwohl das Gebiet für alle gänzlich neu war.

In den Klassen 8 und 11 (Herder-Oberschule) wurden Klassenarbeiten geschrieben. Das Notenprofil entsprach jeweils weitgehend den bisherigen Klassenarbeiten. Einige der schwächeren Schüler konnten aber deutlich bessere Resultate als sonst erzielen. Dies bestätigt die Vermutung, dass eine gänzlich andere Art von Mathematik einen neuen Einstieg in das Fach erleichtert. [15]

Es wurde aber auch deutlich, dass der Schwierigkeitsgrad des Stoffes von vielen Schülerinnen und Schülern unterschätzt wurde. Das liegt vermutlich zum einen daran, dass der Unterricht das immer noch sehr verbreitete Schema von der (frontalen) Präsentation „schwieriger" Inhalte mit anschließender (anstrengender) Übungsphase durchbrochen hat, indem fast der ganze Stoff von den Schülerinnen und Schülern selbst entwickelt und erforscht wurde. Dadurch dass sie sich alle wichtige Teile selbständig erarbeitet haben, entstand der Eindruck, es sei ja alles ganz leicht. Ein Schülerkommentar in Klasse 8 war: „Das haben doch alle verstanden! Da schreiben ja alle eine 1!" Und das war kein freudiger, sondern eher ein entsetzter Ausruf mit dem Unterton: „Das kann doch gar nicht sein, dass es etwas im Mathematikunterricht gibt, das alle kapiert haben!" Diese Beobachtung zeigt im Übrigen auch, wie sehr der Mathematikunterricht noch seinem Image des "harten Faches" verhaftet ist, bei dem nur einige wenige wirklich etwas verstehen können und sollen.

Zum anderen wurde die Anforderung, die selbst gefundenden Algorithmen korrekt zu formulieren, unterschätzt. Der Weg von der Idee für einen Algorithmus zur detaillierten und fehlerfreien Darstellung ist sehr viel weiter, als man zunächst glaubt. Hier liegt die besondere Schwierigkeit und Herausforderung des Stoffes. Insbesondere in der Mittelstufe mangelt es offensichtlich an entsprechendem Problem- und Fehlerbewusstsein. [16] Wie dies methodisch abgefangen werden kann, wird weiter unten beschrieben.

[15] Eine empirische Auswertung von Unterrichtsversuchen findet im Rahmen dieses Projektes nicht statt. Hier können nur Tendenzen festgestellt werden.
[16] vgl. A. Schuster: Bericht für die bayerische Lehrplankommission 12/2001

Am Ende der Unterrichtseinheiten beantworteten die Schülerinnen und Schüler Fragebögen, die allgemein nach der Akzeptanz der Themen fragten. Die Resonanz war durchweg positiv. Insbesondere der Anwendungsbezug wurde hervorgehoben, ebenso das selbständige Erarbeiten der Inhalte. Besonders vielsagend ist die Antwort auf die Frage, wie das Thema gefallen hat: „Besser als Mathe“. Dieser Unterricht unterschied sich methodisch wie inhaltlich so stark vom herkömmlichen Mathematikunterricht, dass er für die Schülerinnen und Schüler gar keine „Mathe“ mehr war. Mehrere waren auch erfreut über diese Mathematik „ohne Rechnen“.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Themen sowohl von Schüler- als auch von Lehrerseite als lohnend und bereichernd erlebt wurden. Das verstärkte selbständige (kreative und entdeckende) Arbeiten, das mit diesen Inhalten besonders gut möglich ist, wurde sehr positiv aufgenommen und brachte gute Resultate hervor.

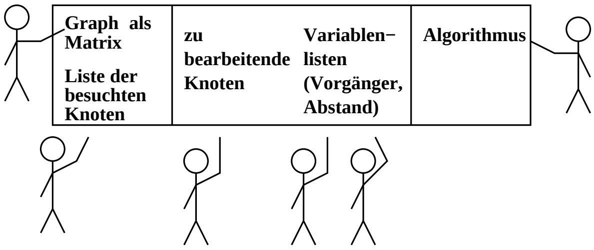
6 Lehrmethoden für die Entwicklung korrekter Algorithmen

Zur Problematik der sauberen Formulierung von Algorithmen haben wir uns verschiedene methodische Ansätze überlegt. Ideal wäre der Einsatz von Software, die mit umgangssprachlichen Eingaben arbeiten kann. D.h. die Schülerinnen und Schüler könnten ihre Version des Algorithmus, ohne dass eine Programmiersprache gelernt werden muss, umgangssprachlich formulieren und erleben, ob tatsächlich das passiert, was sie gedacht hatten. Leider ist die Realisierung einer solchen Software bislang nicht absehbar.

Also muss man etwas Ähnliches simulieren, etwa so: Jemand spielt den „dummen Computer“ an der Tafel, der an einem dort aufgezeichneten Graphen auf das Genaueste die Anweisungen seiner Mitschüler befolgt. Das ist nicht nur hilfreich, sondern auch immer wieder eine fröhliche Auflockerung der Stunde!

Eine weitere Möglichkeit ist, Algorithmen auf lose Blätter aufschreiben zu lassen, zu mischen und neu in der Klasse zu verteilen. Sobald etwas am vorliegenden Text unklar ist, wird das notiert. Diese Methode schärft den Blick für die eigenen und fremden Formulierungen und verbessert das Fehlerbewusstsein.

Sehr lebendig und auch lustig kann die Ausführung eines „Rollenspiels“ an der Tafel werden. An der Tafel werden die verschiedenen benötigten Daten und Speicherplätze notiert: der Graph (in Form einer Adjazenzmatrix z.B.), die Liste der besuchten Knoten, je nach dem welcher Algorithmus durchgeführt werden soll, die Liste der jeweiligen Knotenvorgänger usw. Falls man eine große Tafel zur Verfügung hat, ist es günstig, am Rand Platz zu behalten, um dort die einzelnen durchgeführten Schritte schriftlich festzuhalten. Dann benötigt man für jeden Datensatz jemanden, der diesen verwaltet. Auf diese Art und Weise sind mindestens fünf Schülerinnen und Schüler an der Tafel aktiv. Die anderen fungieren als Kontrollinstanz. Nun soll der Algorithmus zum Laufen gebracht werden. Wer muss anfangen? An wen gibt er oder sie seine Information weiter? Was muss gespeichert werden und was gelöscht? Was muss aufgeschrieben werden? Wo passieren Wiederholungen (die sich als Schleifen im Programm niederschlagen)? Dieses Rollenspiel macht tatsächlich vieles klar und deckt bisherige Denklücken auf. Häufig wird z.B. bei der Konstruktion aufspannender Bäume vergessen, dass man sich die bereits besuchten Knoten irgendwo notieren (bzw. speichern) muss, um Kreise vermeiden zu können. Spätestens wenn die Person des „Kreisvermeiders“ an der Tafel steht und handeln soll, fallen solche vergessenen Komponenten des Algorithmus auf.



Je nach Klassenstufe und zur Verfügung stehender Zeit muss entschieden werden, wie detailliert die Algorithmen ausgearbeitet werden. Das kann von der Ideenskizze bis zur fertigen Implementierung reichen.

7 Das Problem des Beweisens

Die nächste Stufe wäre nun, die Korrektheit der gefundenen Algorithmen zu beweisen. Noch gibt es hierzu keine methodisch modernen Ansätze. Und selbst das Nachvollziehen von vergleichsweise einfachen Korrektheitsbeweisen wird zum Problem. Wie auch schon beim Finden von präzisen Formulierungen für Algorithmen kann der an anderer Stelle große Vorteil von Graphen, nämlich eine gewisse Anschaulichkeit, hier zum Hindernis werden. Sehr oft „sieht man einfach“, dass es so stimmen muss, wie man es gemacht hat. Ein Korrekheitsbeweis muss dann häufig per Widerspruch geführt werden, was nicht nur für Schülerinnen und Schüler schwer ist. Oder es wird die vollständige Induktion gebraucht, die in vielen Lehrplänen nicht mehr vorkommt. Induktionsbeweise auf Graphen sind zudem nicht ganz einfach, nicht nur, weil zu entscheiden ist, ob über die Anzahl der Kanten oder über die Anzahl der Knoten argumentiert wird. Für die Ausarbeitung von Ideen und Konzepten zu Korrektheitsbeweisen für Graphenalgorithmen besteht noch weiterer Forschungsbedarf.

8 Ausblick

Wir hoffen, mit der Durchführung des Projektes „Diskrete Mathematik für die Schule“ einen Beitrag zur Verbesserung und vor allem zur „Verlebendigung“ des Mathematikunterrichts leisten zu können. In den nächsten Monaten werden die Unterrichtsmaterialien weiter ausgearbeitet und interessierten Lehrerinnen und Lehrern zur Verfügung gestellt. Damit beginnt die Bewährungsprobe für diese Themen im Schulalltag. In Kooperation mit dem Berliner DFG-Forschungszentrum „Mathematik für Schlüsseltechnologien" sind zudem Schülerworkshops, Vorträge und Lehrerfortbildungen geplant.

Literatur

Cormen, Thomas H. und Leiserson, Charles E. und Rivest, Ronald R.:
Introduction to Algorithms, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1990

Bondy, J. A. und Murty, U. S. R.:
Graph Theory with Applications, American Elsevier, New York, 1976

Gritzmann, Peter und Brandenberg, Rene:
Das Geheimnis des kürzesten Weges. Ein mathematisches Abenteuer, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 2002

Heun, Volker:
Grundlegende Algorithmen. Einführung in den Entwurf und die Analyse effizienter Algorithmen, Vieweg, Braunschweig, 2000

Korte, Bernhard und Vygen, Jens:
Combinatorial Optimization. Theory and Algorithms, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000

Schuster, Andreas:
Bericht für die Bayerische Lehrplankommission, 12/2001

Schuster, Andreas:
Habilitationsschrift, Universität Würzburg, 2004

Wilson, Robin J.:
Introduction to Graph Theory, Longman Scientific and Technical, Essex, 3. Auflage 1985